数理論理学 I

Mathematical Logic I

12 年　講義ノート

Contents

第 I 部
モデル理論の基礎

1　基礎知識

1.1　順序数

定義 1. 順序集合 $X = (X, <)$ が整列 (well-ordered) であるとは，任意の空でない $A \subset X$ が最小元を持つことである．

注意 2.

1. 整列順序集合 X は全順序集合である．
2. 順序集合 X が整列なることは次の条件 (a)+(b) と同値：
   (a) X が全順序集合である．
   (b) X は無限下降列を持たない．
3. X が整列集合のとき，真なる始切片は $I(a) = \{x \in X : x < a\}$ なる形をしている．
4. 整列順序集合はその真なる始切片と同型にならない．
5. 同型でない 2 つの整列順序集合は，片方が片方の（真の）始切片と同型になる．

定義 3. 整列順序の順序型を順序数 (ordinal) という．自然数 n は n 個のものが一列に並んだ順序集合の順序型と考えて，それ自体が順序数となる．自然数の集合 $\mathbb{N}$ の順序型を ω であらわす．

α, β を二つの異なる順序数とする．上の注意により，α が β の真の始切片になる（このとき $\alpha < \beta$ とかく）または β が α の真の始切片になる（$\beta < \alpha$ とかく）．よって任意の二つの順序数の間に大小が確定する．α より小さな順序数 β は α の始切片となり，注意 2 により $I(b)$ の形をしている．β に対してこの $b \in \alpha$ を対応させる写像は順序同型になる．よって順序数 α は α より小さな順序数全体の作る順序集合の順序型に一致する．このことから，

$$\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$$

と見ることができる．

定義 4 (順序集合の和). $X = (X, <_X)$ と $Y = (Y, <_Y)$ を $X \cap Y = \emptyset$ なる二つの全順序集合とする．このとき，X の後ろに Y を置いてできる全順序集合を $X + Y$ で表す．より正確に言うと次のようになる．

1. $X + Y$ は集合として $X \cup Y$ である．

2. $X + Y$ において $x < y$ が成立するのは，「$x <_X y$ $(x, y \in X)$」，「$x <_Y y$ $(x, y \in Y)$ 」,「$x \in X, y \in Y$」のいずれかが成立するとき．

注意 5.

1. 整列順序集合と整列順序集合の和は再び整列順序集合となる．このことから順序数と順序数の和が定義される．

2. $1 + \omega$ は 1 個の点の後ろに自然数のなす順序集合を並べた順序の順序型．よってそれは順序型としては ω になる．$1 + \omega = \omega$.

3. $\omega + 1$ は自然数の後に 1 点（無限遠点）を付け足した順序の順序型．これは ω と異なる．

4. 順序数の和は非可換であるが，結合律は成立する．

定義 6. 順序数 α が $\alpha = \beta + 1$ とかけるとき，後継順序数 (succesor ordinal）という．$\alpha = \beta + 1$ とかけないとき，極限順序数 (limit ordinal) という．

注意 7.

1. 自然数 $n > 0$ は順序数として後継順序数である．

2. ω は極限順序数である．α が順序数のとき，極限順序数 β と自然数 n が存在して，$\alpha = \beta + n$ とかける（また書き表し方は一意的である）．

定義 8 (順序集合の積). $X = (X, <_X)$ と $Y = (Y, <_Y)$ を二つの全順序集合とする．このとき，各 $y \in Y$ を X のコピーで置き換えてできる順序集合を $X \times Y$ とかく．正確に言うと次のようになる．

1. 順序集合 $X \times Y$ は集合としては，直積集合 $X \times Y$ である．

2. $(x, y) < (x', y') \iff$ 「$y <_Y y'$」または「$y = y'$, $x <_X x'$」.（このような順序の決め方を逆辞書式順序という.）

注意 9.

1. 整列順序集合の積は再び整列順序になる．これにより，順序数の積が順序数として定義できる．

2. 順序数の積も可換ではない．$2 \times \omega = \omega \neq \omega \times 2$.

1.2 濃度と基数

A を集合とする．このとき整列可能性定理により，適当な順序 $<$ を A 上に定義することにより，$A = (A, <)$ を整列順序集合とできる．このことを別の角度で見ると，ある順序数 α によって

$$A = \{a_i : i < \alpha\}$$

と番号付けられることを意味している．$A = \{a_i : i < \alpha\}$ とできる順序数 α の中で最小のものが存在する．これを A の濃度といい $|A|$ で表す．ある集合の濃度となる順序数（$|A|$ の形の順序数）を基数という．基数は集合の大きさを測る指標となる．基数は κ, λ などで表す．

定義 10. κ と λ を基数とする．A, B を $\kappa = |A|$, $\lambda = |B|$, $A \cap B = \emptyset$ なる集合とする．このとき，

1. $\kappa + \lambda = |A \cup B|$,
2. $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$

で基数の和と積を定義する．

注意 11.
1. 上の定義は A, B の取り方に依存しない．
2. 有限の順序数（自然数）は基数であり，これらの間の和と積は自然数の和と積に一致する．
3. 順序数の和と基数の和は異なる．例えば基数の和として，$1 + \omega = \omega + 1 = \omega$ である．
4. κ, λ のいずれか一方が無限のとき，$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

1.3 超限帰納法と Zorn の補題

通常の帰納法では,「任意の自然数に対して性質 P が成立する」を示す場合に次を示す.

(*) 任意の $m < n$ について $P(m)$ が成立する $\Rightarrow$ $P(n)$ も成立する．

この論法は自然数でなくても，順序数上でも成立する．順序数の場合の帰納法を特に超限帰納法という．

例 12. (超限帰納法による証明) 任意の順序数 α が極限順序数 β と自然数 n の和でかけることを超限帰納法で示す．α より真に小さい順序数で，この命題が成立していると仮定する．α が極限順序数のときは明らかに正しい（$\alpha = \alpha + 0$）．α が後継順序数のとき，$\alpha = \alpha_0 + 1$ とかける．$\alpha_0 < \alpha$ なので，α_0 に帰納法の仮定を使うと，極限順序数 β と自然数 n_0 を用いて，

$$\alpha_0 = \beta + n_0$$

とかける．このことから，$\alpha = \alpha_0 + 1 = (\beta + n_0) + 1 = \beta + (n_0 + 1)$ となり，極限順序数 β と自然数 $n_0 + 1$ の和として表現できた．以上から超限帰納法によりすべての順序数が極限順序数と自然数の和でかけることがわかる．

Zorn の補題は一言で言えば，順序集合がある条件を満たせば極大元を持つという主張である．多くの場合次の形で十分である：

(**) A を集合として，$\emptyset \neq \mathfrak{X} \subset \mathcal{P}(A)$ とする．$B_i \in \mathfrak{X}$ $(i < \alpha)$ が包含関係に関する上昇列のとき，必ず

$$\bigcup_{i<\alpha} B_i \in \mathfrak{X}$$

となるとする．このとき，$\mathfrak{X}$ に極大元（包含関係に関して）が存在する．

例 13. R を 1 を持つ環とする．R に極大イデアルが存在することを $Zorn$ の補題で示す.

$$X = \{I \subset R : I \text{ は } 1 \text{ を含まないイデアル}\}$$

とする．X は上昇列の和で閉じている．よって極大元を持つ．それが極大イデアルである.

2 言語，論理式，構造

2.1 言語

数学で使う記号のうち，定数記号，関数記号，述語記号に注目する．これらからなる一つの集合を固定して，それを言語とよぶ.

例 14. 1. 群の言語とは集合 $\{e, *\cdot *, *^{-1}\}$ のことである．ここで，e は単位元を表現するための定数記号，$*\cdot*$ は群の演算を表現するための 2 変数の関数記号，$*^{-1}$ は逆元を対応させる操作に対応する関数記号である．($*$ はそこに何かが代入できることを意味しようとしている．)

2. 体の言語とは集合 $\{0, 1, * + *, -*, * \cdot *, *^{-1}\}$ のことである．

3. 順序体の言語とは集合 $\{0, 1, * + *, -*, * \cdot *, *^{-1}, * < *\}$ のことである．

上の例では，各記号はそれぞれ（ある程度）固有の意味を持っていた．たとえば，体の言語における 0 はもちろん加法に対する単位元をあらわすものだという暗黙の了解がある．

しかし，われわれが今後展開する議論においては，記号は単なる記号であり，それらに固有の意味はない．ただし，それぞれの記号は定数記号か，関数記号か，述語記号なのかは指定されている．また関数記号，述語記号の場合は何変数かも指定されている．言語は L,L',... などであらわす．

次に変数記号の集合を一つ固定しておく．これらは，x,y,z,x_0,x_1,... などである．

定義 15. (項) L を言語とする．L の項は次のように帰納的に定義される．

0. 変数記号と L に属する定数記号はすべて L の項である．

1. $t_1, ..., t_n$ がすべて L の項で，$F \in L$ が n 変数の関数記号ならば，$F(t_1, ..., t_n)$ は L の項である．

2. 以上によって項とわかるものだけが L の項である．

通常上のような帰納的な定義においては，条件 3 は省略される．

例 16. $L = \{c, F\}$ とする．ただし，c は定数記号，F は 2 変数関数記号である．このとき，

$$x, c, F(x, c), F(x, F(x, c)), F(F(x, c), F(x, c)), ...$$

などは L の項の例である．

定義 15 は次のように言ってもよい：

1. $T_0 = \{$ 変数記号 $\} \cup \{L$ の定数記号 $\}$;

2. $T_{k+1} = \{F(t_1, ..., t_n) : t_1, ..., t_n \in T_k$, $F \in L$ は n 変数関数記号 $\}$;

3. L の項の集合 $= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k$.

問 17. G を群とする．$A \subset G$ によって生成される G の部分群 $\langle A \rangle$ を帰納的に定義せよ．

以上で変数記号の集合と言語（これも記号の集合）から項の集合という記号の有限列の集合が定義された．次に項を使って「命題」を意味する記号列である論理式を定義したい．そのために新たに論理記号の集合 $\{=, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \forall, \exists\}$ を導入する．

定義 18. (原子論理式)

1. t と s が L の項のとき，記号列 $t = s$ は L の原子論理式である．

2. $t_1, ..., t_n$ がすべて L の項で，$P \in L$ が n 変数の述語記号ならば，$P(t_1, ..., t_n)$ は L の原子論理式である．

例 19. $L = \{c, F, * < *\}$ とする．ただし，c は定数記号，F は 2 変数関数記号，$* < *$ は 2 変数述語記号である．このとき，

1. $F(x, c) = y$,

2. $F(x, y) < F(F(x, y), c)$

などは原子論理式の例である．

L の項 t の中に現れる変数記号が $x_1, ..., x_n$ に含まれるとき，t を $t(x_1, ..., x_n)$ とかくことがある．

次に論理式の定義を与えるが，このために論理記号とよばれる記号 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$ を用意する．

定義 20. (論理式) L を言語とする．L の論理式（L-論理式）は次のように帰納的に定義される．

0. L の原子論理式は L の論理式である．

1. φ, ψ が L の論理式で x が変数ならば，

$$\neg(\varphi),\ (\varphi) \wedge (\psi),\ (\varphi) \vee (\psi),\ (\varphi) \rightarrow (\psi),\ \forall x(\varphi), \exists x(\varphi)$$

はすべて L の論理式である．

L-論理式 φ の中に，変数 x があらわれていて，なおかつこの x に作用しているような $\forall x$ または $\exists x$ があるとき，この x を束縛（された）変数という．束縛されていない変数は自由変数とよぶ．たとえば φ が $(\forall x(F(x,y) = x)) \wedge (F(x,x) = z)$ のとき，$\wedge$ の前に出てくる x は $\forall x$ で束縛された変数だが，後半の x は自由変数である．φ の中の自由変数がすべて $x_1, ..., x_n$ に含まれるとき，φ のことを $\varphi(x_1, .., x_n)$ とかくことがある．また，このとき φ は n 変数論理式とよばれる．

定義 21．（閉論理式）論理式 φ の中に自由変数がないとき，φ を閉論理式とよぶ.

2.2 構造

論理式はあくまでも記号の列であり，固有の意味は持たない．意味を与えるのは構造である.

以下で α,β... などは順序数を表す.

定義 22．（構造）$L = \{c_i : i < \alpha\} \cup \{F_i : i < \beta\} \cup \{P_i : i < \gamma\}$ を言語とする．ただし，c_i は定数記号，F_i は m_i 変数の関数記号，P_i は n_i 変数述語記号とする．次の条件を満たす対

$$(M; \{c_i^M\}_{i<\alpha}, \{F_i^M\}_{i<\beta}, \{P_i^M\}_{i<\gamma})$$

を一つの L-構造とよぶ：

1. $M \neq \emptyset$
2. $c_i^M \in M$ $(i < \alpha)$
3. F_i^M は M^{m_i} から M への関数 $(i < \beta)$
4. $P_i^M \subset M^{n_i}$ $(i < \gamma)$

c_i^M を定数記号 c_i の M における解釈とよぶ．同様に F_i^M は関数記号 F_i の解釈，P_i^M を述語記号 P_i の解釈とよぶ．M を上の構造のユニバース（領域）とよぶ.

注意 23. *1.* 定数記号は名前の示すとおり定数（特定の元）を表すための記号であるから，構造では実際特定の元に解釈されている．同様に関数記号は関数をあらわすための記号であり，構造ではまさに関数に解釈されているわけである．述語記号の場合は，少し注意を要する．述語記号の解釈は述語記号を成り立たせたい元全体として解釈されているわけである．たとえば実数の世界において $<$ の「通常の」解釈は $\{(x, y) \in \mathbb{R} : x < y\}$ になっている．

2. 言語の解釈を明示する必要がないとき（あるいは面倒なとき）ユニバース M だけを示して，構造とよぶ．しかし我々の立場で構造という場合は言語の解釈の部分も本来は明示すべきである．たとえば，実数の集合 $\mathbb{R}$ を考えるとき，構造 $(\mathbb{R}, 0., 1, +, \cdot)$ と $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ とはまったく異なるものとして扱う．前者は体としての実数構造であり，後者は順序体としの実数構造である．

3. $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ を言語として，$\mathbb{R}$ を L-構造にする方法は１つでない．０は実数の０と解釈して，１は１に解釈，$+$ は和を与える関数，$\cdot$ は積を与える関数に解釈するのが普通ではあるが，たとえば，０を実数の１と解釈しても我々の意味では L-構造になる．

次はまったく常識的な定義である．L の項 t は帰納的に構成されていた．したがって，項 t の M においての値も t がいかに構成されたかに従って帰納的に定義される：

定義 24. (項の解釈) M を L-構造とする．L の項 $t(x_1, ..., x_n)$ と $a_1, ..., a_n \in M$ に対して,「t に $a_1, ..., a_n$ を代入した値」（$t^M(a_1, ..., a_n)$）を帰納的に左辺を右辺で定義する:

0. (a) t が変数 x_i のときのとき,

$$t^M(a_1, ..., a_n) = a_i.$$

(b) t が定数記号 c のとき,

$$t^M(a_1, ..., a_n) = c^M.$$

1. t が $F(t_1(x_1, ..., x_n), ..., t_m(x_1, ..., x_n))$（$F$ は関数記号，t_i たちは項）のとき,

$$t^M(a_1, ..., a_n) = F^M(t_1^M(a_1, ..., a_n), ..., t_m^M(a_1, ..., a_n)).$$

定義 25. （論理式の解釈）M を L-構造，$a_1, ..., a_n \in M$ とし，$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ を L-論理式とする．「M で $\varphi(a_1, ..., a_n)$ が成立する」（$M \models \varphi(a_1, ..., a_n)$）という関係を帰納的に定義する．

1.
   - φ が原始論理式 $t(x_1, ..., x_n) = u(x_1, ..., x_n)))$ のときは，
   $$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff t^M(a_1, ..., a_n) = u^M(a_1, ..., a_n).$$
   - φ が原始論理式 $P(t_1(x_1, ..., x_n), ..., t_m(x_1, ..., x_n))$ のときは，
   $$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff (t_1^M(a_1, ..., a_n), ..., t_m^M(a_1, ..., a_n)) \in P^M.$$

2.
   - φ が $\varphi_1(x_1, ..., x_n) \wedge \varphi_2(x_1, ..., x_n)$ のとき，
   $$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff \text{“}M \models \varphi_1(a_1, ..., a_n)\text{かつ}M \models \varphi_2(a_1, ..., a_n)''.$$
   - φ が $\varphi_1(x_1, ..., x_n) \vee \varphi_2(x_1, ..., x_n)$ のとき，
   $$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff \text{“}M \models \varphi_1(a_1, ..., a_n)\text{または}M \models \varphi_2(a_1, ..., a_n)''.$$
   - φ が $\varphi_1(x_1, ..., x_n) \to \varphi_2(x_1, ..., x_n)$ のとき，
   $$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff \text{“}M \models \varphi_1(a_1, ..., a_n)\text{ならば}M \models \varphi_2(a_1, ..., a_n)''.$$
   - φ が $\neg\psi(x_1, ..., x_n)$ のとき，
   $$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff \text{“}M \models \varphi(a_1, ..., a_n)\text{でない}''.$$
   - φ が $\exists x \psi(x, x_1, ..., x_n)$ のとき，
   $$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff \text{“適当な}\, b \in M \text{ に対し } M \models \psi(b, a_1, ..., a_n)''.$$
   - φ が $\forall x \psi(x, x_1, ..., x_n)$ のとき，
   $$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff \text{“任意の}\, b \in M \text{ に対し } M \models \psi(b, a_1, ..., a_n)''.$$

問 26. $\psi(x)$ を論理式として，c を定数記号とする．このとき，$M \models \psi(c) \iff M \models \psi(c^M)$ を示せ．（ヒント： ψ が原子論理式の場合は $\models$ の定義から明らか．それ以外のときは，論理式の複雑さに関する帰納法を用いる．帰納法にのるように工夫が必要.）

構造を保存する写像を同型写像とよぶ．正確には次のようになる．

定義 27. (同型) L を定義 22 における言語 L とする．M と N を L-構造とする．全単射 $\sigma : M \to N$ が同型写像であるとは次の条件を満たすことである．

1. $\sigma(c_i^M) = c_i^N$ $(i < \alpha)$;
2. $\sigma \circ F_i^M = F_i^N \circ \underbrace{(\sigma, ..., \sigma)}_{n_i}$ $(i < \beta)$;
3. $\sigma(P_i^M) = P_i^N$ $(i < \gamma)$.

条件２，３は次のように言い換えることができる．

2'. $F_i^M(a_1, ..., a_{m_i}) = b \iff F_i^N(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_{n_i})) = \sigma(b)$, $(\forall a_1, ..., a_{m_i}, b \in M)$;

3'. $(a_1, ..., a_{n_i}) \in P_i^M \iff (\sigma(a_1), ..., \sigma(a_{n_i})) \in P_i^N$ $(\forall a_1, ..., a_{n_i} \in M)$.

問 28. $\sigma : M \to N$ を同型写像とする．このとき，すべての項 $t(x_1, ..., x_n)$ に対して，

$$\sigma(t^M(a_1, ..., a_n)) = t^N(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_n)) \quad (\forall a_1, ..., a_n \in M)$$

が成立することを t の構成に関する帰納法で示せ．

問 29. L-構造の間の全単射 $\sigma : M \to N$ に対して次が同値になることを示せ..

1. $\sigma : M \to N$ は同型写像*;*

2. すべての原始論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ とすべての $a_1, ..., a_n \in M$ に対して，

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff N \models \varphi(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_n)).$$

定義 30. (基本写像) M,N を L-構造，$A \subset M$, $B \subset N$ とする．写像 $\sigma : A \to B$ は条件

(*) すべての L-論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ とすべての $a_1, ..., a_n \in A$ に対して，

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff N \models \varphi(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_n)).$$

を満たすとき，基本写像とよばれる．

問 31. 同型写像は基本写像になることを示せ.（ヒント：上の定義 *30* の *(*)* の部分を論理式 φ の構成に関する帰納法で示せばよい.）

2.3 コンパクト性定理

定義 32. T を L-閉論理式の集合とする.

$$M \models T \iff M \models \varphi \ (\forall \varphi \in T)$$

と定義する．$M \models T$ のとき，M は T のモデルであるという.

定理 33. （コンパクト性定理）T を L-閉論理式からなる一つの集合とする．このとき，次は同値である.

1. T はモデルを持つ（$\exists M \ s.t. \ M \models T$）;
2. T の各有限部分はモデルを持つ（$\forall S \subset_{\text{fin}} T \ \exists M_S \ s.t. \ M_S \models S$）.

Proof. $1 \Rightarrow 2$ は自明である．2 を仮定して 1 を導く．L を可算として議論を単純化する．$C = \{c_i : i \in \omega\}$ を新しい定数記号の集合として，$L^* = L \cup C$ とおく．L^*-論理式で自由変数 x を持つもの全体を一列に並べて，$\{\varphi_i(x) : i \in \omega\}$ とする．このとき，φ_i の中に現れる新定数の番号は i 未満だと仮定できる．このとき，

$$T' = T \cup \{\exists x \varphi_i(x) \to \varphi_i(c_i) : i \in \omega\}$$

とおく.

主張 A. T' の各有限部分はモデルを持つ.

$n \in \omega$ に対して，$T_n = \{\psi_0, ..., \psi_n\} \cup \{\exists x \varphi_i(x) \to \varphi_i(c_i) : i = 0, ..., n\}$ とするとき，各 Tn がモデルを持つことを示せばよい．ただし，ψ_n たちは T の論理式を一列に並べたものである．$\{\psi_0, ..., \psi_n\}$ は T に関する仮定から，あるモデル N を持つ．次に $i = 0, ..., n$ に対して順に，$\varphi_i(x)$ が N に解を持てば，その解の一つを選んで, c_i という名前を付ければよい．このとき，$N \models T_n$ となる.（主張 A の証明終わり）

次に T' を「各有限部分はモデルを持つ」という条件を保存したまま，Zorn の補題を用いて（L^*-閉論理式の）極大な集合 T^* に拡大する．T^* の極大性から次が成り立つ：

主張 B. T^* は完全である．すなわち，任意 L^*-閉論理式 φ に対して，$\varphi \in T^*$ か $\neg\varphi \in T^*$ のいずれかが成り立つ.

T^* を用いて，L^*-構造を作る.

- 変数を持たない L^*-項全体（すなわち closed term 全体）を CT とする．
- CT に 2 項関係 $\sim$ を導入する：$t \sim u \iff t = u \in T^*$.
- $M = CT/\sim$ とする．$t \in CT$ の同値類を $[t]$ とかけば，$M = \{[t] : t \in CT\}$ である．
- 定数記号 $c \in L^*$ の解釈は，$c^M := [c]$ とする．
- m 変数関数記号 $F \in L^*$ の解釈は，$F^M([t_1], ..., [t_m]) := [F(t_1, ..., t_m)]$ とする．(極大性から，この定義は well-defined である．さらに $t^M = [t]$ となることもわかる．)
- n 変数述語記号 $F \in L^*$ の解釈は，$P^M = \{([t_1], ..., [t_n]) : P(t_1, ..., t_n) \in T^*\}$ とする．

このとき，次を示せば，M が T のモデルになることがわかる．

主張 C. 任意の L^*-閉論理式 φ に対して，

$$M \models \varphi \iff \varphi \in T^*.$$

φ に現れる論理記号の数 l に関する帰納法である．$l = 0$ のときは，φ は原子論理式である．ここでは $P(t_1, ..., t_n)$ の形の原子論理式について議論する．しかし，その場合は，

$$\begin{aligned} M \models P(t_1, ..., t_n) &\iff (t_1^M, ..., t_n^M) \in P^M \\ &\iff ([t_1], ..., [t_n]) \in P^M \\ &\iff P(t_1, ..., t_n) \in T^* \end{aligned}$$

より明らかである．次に $l > 0$ として，φ が $\exists x \psi(x)$ の場合を扱う（その他の場合は演習問題）．

$$\begin{aligned} M \models \exists x \psi(x) &\iff M \models \psi([t])\ (\exists [t] \in M) \\ &\iff M \models \psi(t)\ (\exists [t] \in M) \\ &\iff \psi(t) \in T^*\ (\exists t \in CT) \\ &\iff \exists x \psi(x) \in T^*. \end{aligned}$$

最後の変形において，$\psi(t) \in T^*$ から $\exists x \psi(x) \in T^*$ が得られるのは，T^* の極大性による．逆向きの矢印は $\exists x \psi(x) \to \psi(c)$ の形の論理式が $T' \subset T^*$ に入っていることによる． ∎

3　コンパクト性とウルトラプロダクト

3.1　ウルトラフィルター

定義 34. (ウルトラフィルター) 無限集合 I とその部分集合全体 $\mathcal{P}(I)$ を考える．$U \subset \mathcal{P}(I)$ とする．

1. U は有限交叉性を持つ $\iff$ U の勝手な有限部分集合 $F \subset U$ は共通部分を持つ（すなわち，$\forall \underbrace{A_1, ..., A_n}_{finite} \in U$ に対して，$A_1 \cap ... \cap A_n \neq \emptyset$）．

2. U が I 上のウルトラフィルター $\iff$ U は有限交叉性を持つ $\mathcal{P}(I)$ の部分集合の中で極大である（すなわち，U 自体は有限交叉性を持ち,U の真の拡大はもはや有限交叉性を持たない）．

例 35. *1.* I を無限集合とする．$A \subset I$ が補有限（*cofinite*）であるとは，A の補集合 $A^c = I \setminus A$ が有限となることである．$F = \{A \subset I :$ A は補有限$\}$ とすれば，F は有限交叉性を持つ．

2. I を非可算集合とする．$F = \{A \subset I : A^c$ は高々可算$\}$ とすれば，F は有限交叉性を持つ．

問 36. I 上のウルトラフィルター U に対して次を示せ：

1. $A \in U,\ A \subset B \subset I \ \Rightarrow\ B \in U;$

2. $A \in U,\ B \in U \quad \iff \quad A \cap B \in U.$

問 37. $a \in I$ とするとき，$U_a = \{A \subset I : a \in A\}$ は I 上のウルトラフィルターになることを示せ.（ヒント：U_a のすべての元は a を持つのでそれらの共通部分は空でない．$\{a\} \in U_a$ に注意する．U_a を真に拡大する集合には a を含まない集合 B がある．このとき，$\{a\} \cap B = \emptyset$ である.）

注意 38. $U \subset \mathcal{P}(I)$ が有限交叉性を持つとき，次は同値である．

1. U はウルトラフィルターである．

2. 勝手な $A \subset I$ に対して，$A \in U$ または $A^c \in U$.

次の二つの補題はともに易しいが重要である．

補題 39. $U_i \subset \mathcal{P}(I)$ $(i < \alpha)$ を有限交叉性を持つ集合の上昇列とする．このとき，$U^* = \bigcup_{i<\alpha} U_i$ も有限交叉性を持つ．

Proof. 有限個の $A_i, ..., A_n \in U^*$ を任意にとる．このとき，これらをすべて含む U_i が存在する．U_i は有限交叉性を持つので，$A_1 \cap ... \cap A_n$ は空でない． ∎

補題 40. $U \subset \mathcal{P}(I)$ が有限交叉性を持つとする．このとき，任意の $A \subset I$ に対して，

$$U \cup \{A\} \text{ または } U \cup \{A^c\}$$

の少なくとも一方は有限交叉性を持つ．

Proof. 両方とも有限交叉性を持たないとすれば，有限集合 $F_1 \subset U$ と $F_2 \subset U$ で，$\bigcap F_1 \cap \{A\} = \emptyset, \bigcap F_2 \cap \{A^c\} = \emptyset$ となるものが存在する．したがって，$F = F_1 \cup F_2$ とすれば，$\bigcap F = \emptyset$ となる．これは矛盾． ∎

例 37 で存在を示したのは，中心のあるウルトラフィルターである．中心のないウルトラフィルターも存在する．

定理 41. （ウルトラフィルターの存在）I を無限集合として，$F \subset \mathcal{P}(I)$ は有限交叉性を持つとする．このとき，F を拡大して I 上のウルトラフィルターにすることができる．($\exists U \supset F$ *s.t.* U は I 上のウルトラフィルター.）

Proof. $\mathcal{P}(I)$ の濃度を κ として，$\mathcal{P}(I)$ の元を一列にならべた列 $\{A_i : i < \kappa\}$ を作っておく．以下のように $i \leq \kappa$ に関する帰納法で，上昇列 $U_i \subset \mathcal{P}(\mathcal{I})$ を作る：

1. $U_0 = F$;
2. $i = \alpha + 1$ のとき，$U_i \subset \mathcal{P}(I)$ は
   - $U_\alpha \subset U_i$;
   - A_α または A_α^c のいずれかは U_i に属する．

   を満たす有限交叉性を持つ集合とする．（補題から存在がわかる）
3. i が極限順序数のとき $U_i = \bigcup_{j<i} U_j$.

このとき，補題から $U = U_\kappa$ は有限交叉性を持つことはすぐわかる．次に勝手な $A \subset I$ が与えられたとき，$A \in U$ または $A^c \in U$ を示せばよい．$A = A_\alpha$ となる α を選ぶ．構成法から $A \in U_{\alpha+1}$ または $A^c \in U_{\alpha+1}$ である．$U_{\alpha+1} \subset U$ だから証明された． ∎

注意 42. 中心のない $\mathbb{N}$ 上のウルトラフィルターは次のように作ればよい.$F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を補有限集合全体とする．これは有限交叉性を持ち，$\bigcap F = \emptyset$ である．F はウルトラフィルターに拡大される．

3.2 ウルトラプロダクト

この節では，言語 L は関数記号だけからなる場合を考える．この仮定は表現を簡潔にするためだけのもので，一般の場合もまったく同様の議論ができる．

$I \neq \emptyset$ を集合とする．各 $i \in I$ に対して，M_i を L-構造とする．ユニバースの直積 $N = \Pi_{i \in I} M_i$ を考えよう．N の元は $(a_i)_{i \in I}$ の形をしている．関数記号 $F \in L$ の解釈を成分ごとの計算に帰着することにより L-構造となる．もう少し正確に述べれば，次のように定めることで L-構造となる：

$$F^N(a^1, ..., a^n) \ = \ \left(F^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n)\right)_{i \in I}$$

ただし，$a^j = (a_i^j)_{i \in I} \in N \ (j = 1, ..., n)$ である．(j 乗というわけではないので注意.）

上の定義は，群や環の直積の定義を模したものになっている．しかし，次のことに注目してほしい．

問 43. $|I| \geq 2$ として，F_i $(i \in I)$ たちを体とする．このとき，F_i たちの直積は体にはならないことを示せ．

そこで，構造に対する条件（群だったり体だったりという条件）を保存する拡大を考えたい．そのために必要となるのが，直積集合をウルトラフィルターによる同値関係で割るという操作である．

以下では，しばらく次の仮定をおく．

- I を無限集合として，
- U をその上のウルトラフィルターとする．
- 各 $i \in I$ に対して，L-構造 M_i が与えられている．
- N をこれらの構造の直積とする．
- $a \in N$, $i \in I$ に対して，a_i はその i 番目の座標とする．すなわち $a = (a_i)_{i \in I}$ である．

問 44. 直積集合 N 上の 2 項関係 $\sim$ を

$$a \sim b \iff \{i \in I : a_i = b_i\} \in U$$

で定義する．このとき，$\sim$ は同値関係になることを示せ．

N を同値関係で割った集合を $M^* = \prod_{i \in I} M_i/U$ であらわすことにする．$a \in N$ の同値類を $[a]$ であらわすことにすると，$M^* = \{[a] : a \in N\}$, $[a] = [(a_i)_{i \in I}$ である．

定義 45. （ウルトラプロダクト）$M^* = \prod_{i \in I} M_i/U$ は各関数記号 $F \in L$ の解釈を次のように定めることで L-構造になる．

$$F^{M^*}([a^1], ..., [a^n]) = [F^N(a^1, ..., a^n)].$$

L-構造としての M^* を M_i たちのウルトラプロダクトという．

注意 46. 上の定義が *well-defined* なことは調べておく必要がある．すなわち，$a^1 \sim b^1$, ..., $a^n \sim b^n$ のとき，

$$F^N(a^1, ..., a^n) \sim F^N(b^1, ..., b^n)$$

を示す必要がある．しかし，これは「$A, B \in U$ のとき $A \cap B \in U$」を使えば簡単である．

補題 47. $t(x^1, ..., x^n)$ を L の項とする．$[a^1], ..., [a^n], [b] \in M^*$ に対して，

$$t^{M^*}([a^1], ..., [a^n]) = [b] \iff \{i \in I : t^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i\} \in U.$$

Proof. t が変数記号 x のときは自明．t が L の関数記号 F のとき，

$$\begin{aligned} F^{M^*}([a^1], ..., [a^n]) = [b] &\iff [F^N(a^1, ..., a^n)] = [b] \\ &\iff [\left(F^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n)\right)_i] = [(b_i)_i] \\ &\iff \{i \in I : F^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i\} \in U. \end{aligned}$$

後は t の構成に関する帰納法で示せばよい. 最も単純な場合を示しておく：$t = F(u)$ で F は 1 変数関数記号，u は 1 変数の項とする．$[a] \in M^*$ に対して，$u^{M^*}([a]) = [d]$ とすれば，帰納法の仮定から，$\{i \in I : u^{M_i}(a_i) = d_i\} \in U$ となる．したがって，

$$\begin{aligned} F^{M^*}(u^{M^*}([a])) = [b] &\Rightarrow F^{M^*}([d]) = [b] \\ &\Rightarrow \{i \in I : F^{M_i}(d_i) = b_i\} \in U \ \& \ \{i \in I : u^{M_i}(a_i) = d_i\} \in U \\ &\Rightarrow \{i \in I : F^{M_i}(d_i) = b_i \ \& \ u^{M_i}(a_i) = d_i\} \in U \\ &\Rightarrow \{i \in I : F^{M_i}(u^{M_i}(a_i)) = b_i\} \in U. \end{aligned}$$

逆も同様である． ∎

定理 48. （ウルトラプロダクトの基本定理）$\varphi(x^1, ..., x^n)$ を L-論理式とする．任意の $[a^1], ..., [a^m] \in M^*$ に対して次が成立する：

$$M^* \models \varphi([a^1], ..., [a^n]) \iff \{i \in I : M_i \models \varphi(a_i^1, ..., a_i^n)\} \in U.$$

Proof. 0) φ が原子論理式のときは補題から明らか．後は φ の構成に関する帰納法で示せばよい.
1) φ が $\neg\psi$ のとき：

$$\begin{aligned}
M^* \models \neg\psi([a^1], ..., [a^n]) &\iff M^* \models \psi([a^1], ..., [a^n]) \text{ でない} \\
&\iff \{i \in I : M_i \models \psi(a_i^1, ..., a_i^n)\} \notin U \\
&\iff \{i \in I : M_i \models \psi(a_i^1, ..., a_i^n)\}^c \in U \\
&\iff \{i \in I : M_i \models \psi(a_i^1, ..., a_i^n) \text{ でない }\} \in U \\
&\iff \{i \in I : M_i \models \neg\psi(a_i^1, ..., a_i^n)\} \in U.
\end{aligned}$$

2)φ が $\exists y\psi(x^1, ..., x^n, y)$ のとき：

$$\begin{aligned}
M^* \models \exists y\psi([a^1], ..., [a^n], y) &\iff M^* \models \psi([a^1], ..., [a^n], [b]) \text{ for some } b \in M^* \\
&\iff \{i \in I : M_i \models \psi(a_i^1, ..., a_i^n, b_i)\} \in U \text{ for some } b_i\text{'s} \\
&\iff \{i \in I : M_i \models \exists y\psi(a_i^1, ..., a_i^n, y)\} \in U
\end{aligned}$$

3) その他の論理記号の場合も同様である. ∎

系 49. φ を L-閉論理式とする．このとき,

$$M^* \models \varphi \iff \{i \in I : M_i \models \varphi\} \in U$$

上の系で主張していることを一言でいうと次のようになる：論理式 φ がウルトラプロダクトで成立するのは,（U の意味で）ほとんどの M_i たちが φ を成立させるときである.

3.3 コンパクト性定理と応用

ウルトラプロダクトの基本定理は非常に重要な定理である．コンパクト性定理はこの定理の系として得ることもできる.

定理 50. （コンパクト性定理，再掲）T を L-閉論理式からなる一つの集合とする．このとき，次は同値である.

1. T はモデルを持つ（$\exists M\ s.t.\ M \models T$）;

2. T の各有限部分はモデルを持つ（$\forall S \subset_{\text{fin}} T\ \exists M_S\ s.t.\ M_S \models S$）.

Proof. $1 \Rightarrow 2$ は明らかである．$2 \Rightarrow 1$ を示す．T の有限部分集合全体を I とおく．各 $S \in I$ 対して，$M_S \models S$ となる L-構造を一つずつ選んでおく．$\varphi \in T$ に対して，

$$A_\varphi = \{S \in I : M_S \models \varphi\}$$

と定義する．A_φ は空でない I の部分集合である．A_φ たち全体を F とおく．

Claim 1 $F \subset \mathcal{P}(I)$ は有限交叉性を持つ.

$A_{\varphi_1}, ..., A_{\varphi_n} \in F$ とする．このとき，$M_{\{\varphi_1,...,\varphi_n\}}$ は各 φ_i のモデルになっているから，

$$\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \in A_{\varphi_1} \cap ... \cap A_{\varphi_n}$$

したがって，$A_{\varphi_1} \cap ... \cap A_{\varphi_n} \neq \emptyset$.（主張 1 の証明終わり）

したがって，F を拡大して I 上のウルトラフィルター U を作ることができる．$M = \prod_{S \in I} M_S/U$ とおく.

Claim 2 $M \models T$.

各 $\varphi \in T$ に対して，$M \models \varphi$ を示せばよい．そのためには，ウルトラフィルターの基本定理により，$\{S \in I : M_S \models \varphi\} \in U$ を示せばよい．しかし，これは $A_\varphi \in U$ から明らかである. ∎

例 51.（自然数の超準モデルの存在）自然数の集合 $\mathbb{N}$ を $\{0, 1, +, \cdot, <\}$-構造と考える．c を新しい定数記号として，$T = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n : n \in \mathbb{N}\}$ を考える.（$c > n$ はこの言語では，$c > \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}$ とかかれている.）T の有限部分集合 T_0 が与えられたとき，T_0 のモデルが存在することを示す. T_0 は次の形（の部分集合）と思ってよい.

$$\{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n_1, \ldots, c > n_k\}$$

c の解釈を $n = \max\{n_1, ..., n_k\} + 1$ とすれば，$\mathbb{N}$ は T_0 のモデルになる．コンパクト性定理により，T 全体のモデル $\mathbb{N}^*$ が存在する．$\mathbb{N}^*$ をもともとの言語 $\{0, 1, +, \cdot, <\}$ に制限して考えよう．作り方から，$\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^*$ は論理式で区別できない．しかし，$\mathbb{N}^*$ には c の解釈をとることができるので，$\mathbb{N}$ と同型ではない.

例 52. （濃度の表現不可能性）L-構造 M が 3 個の以上の元を持つということは，論理式 $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [x_1 \neq x_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_3]$ で表現される．同様に有限の n が与えられたとき，L-構造が n 個以上の元を持つということを表現する L-閉論理式 φ_n がある．このとき，

$$M \models \varphi_n \wedge \neg \varphi_{n+1} \iff M \text{ の濃度は } n$$

が成立する．しかし，

$$M \models \varphi^* \iff M \text{ は有限}$$

を成り立たせる L-閉論理式 φ^* は存在しない：このような φ^* が存在したとする．各有限の n に対して，濃度が n 以上の有限 L-構造 M_n が存在する．このことは，$T = \{\varphi^*\} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ の各有限部分がモデルを持つことを意味する．したがって T 全体にもモデル M が存在する．この M は無限だが φ^* を成り立たせている．矛盾．κ を無限基数とするとき，「$M \models \varphi_\kappa \iff M$ の濃度は κ」となる φ_κ も存在しないことがいえる．これは次の節で述べる *Löwenheim-Skolem* の定理からもわかる．

3.4 Löwenheim-Skolem の定理

定義 53. （部分構造）M を L-構造とする．部分集合 $N \subset M$ が次の条件を満たすとき M の部分構造と呼ばれる．

1. $c \in L$ が定数記号のとき，$c^M \in N$；
2. $F \in L$ が関数記号のとき，F^M で N は閉じている．

N が M の部分構造のとき，各記号の解釈を N に制限することにより，N は自然に L-構造になる．すなわち，定数記号に対しては，$c^N = c^M$, n-変数関数記号に対しては，$F^N = F^M | N^n$, m-変数述語記号については，$P^N = P^M \cap N^m$ とする．

問 54. 群を $\{e, * \cdot *, *^{-1}\}$-構造と考えれば，部分群の概念と部分構造の概念は一致することを示せ．

定義 55. M を L-構造とする．

1. $A \subset M$ とする．言語 L に新しい定数記号 c_a たち（$a \in A$）を付加した言語を $L(A)$ とかく．M は自然に $L(A)$ 構造となる．すなわち，$c_A^M = a$ と解釈する．

2. 部分構造 $N \subset M$ は次の条件を満たすとき，基本部分構造（elementary substructure）と呼ばれる：

(*) 任意の $L(N)$-閉論理式 φ に対して，$M \models \varphi \iff N \models \varphi$.

このとき，M は N の基本拡大とよばれる．

3. N が M の基本部分構造のとき，$N \prec M$ あるいは $M \succ N$ とかく．

例 56. M を L-構造とする．T^* を M で成立する $L(M)$-閉論理式全体の集合とする．この T^* を T の基本設計図（*elementary diagram*）という．T の勝手なモデルは M の基本拡大と思うことができる．実際 $a \in M$ に対して，c_a^N を対応させる関数 σ が基本部分構造としての埋め込みになっている．すなわち，$\sigma : M \cong \sigma(M) \prec N$．別の言葉で言えば，$\sigma$ が基本写像になっている．

問 57. *1.* 基本部分構造の定義の *(*)* において，片側向きの矢印が成立すれば実は両側向きの矢印が成立する．

2. $\prec$ に対して推移性が成り立つことを示せ．

以下において M は濃度が無限の L-構造とする．

補題 58. κ を無限基数とするとき，M の基本拡大で濃度が κ 以上のものが存在する．

Proof. T^* を M の基本設計図とする．$L(M)$ に属さない新しい定数記号を κ 個用意する．それらを $\{c_i : i < \kappa\}$ とする．$L(M) \cup \{c_i : i < \kappa\}$-閉論理式の集合

$$T^{**} = T^* \cup \{c_i \neq c_j : i < j < \kappa\}$$

を考える．明らかに T^{**} の有限部分はモデルを持つ.（有限個の c_i たちはすべて異なるように M の中で解釈してやることができる.）したがって，T^{**} のモデル N が存在する．$N \succ M$ と考えることができる．また T^{**} の条件から，N は κ 個の異なる元を有するので濃度は κ 以上である．∎

上の補題は，構造の大きさを大きい方に変えることができることを意味している．次に構造の大きさを小さくする方向を考える．その場合に重要になるのが，基本部分構造の判定条件である．

補題 59. *(Tarski-Vaught の判定条件)* M を L-構造とする．$N \subset M$ に対して，次は同値である：

1. $N \prec M$;

2. 勝手な $L(N)$-論理式 $\varphi(x)$ に対して，

$$M \models \exists\varphi(x) \;\;\Rightarrow\;\; M \models \varphi(a) \text{ となる } a \in N \text{ が存在する．}$$

Proof. $1 \Rightarrow 2$ は易しいので省略（演習問題）．

$2 \Rightarrow 1$: L-論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ の構成に関する帰納法で次を示す：

(*) $M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff N \models \varphi(a_1, ..., a_n) \quad (\forall a_1, ..., a_n \in N)$

構造の定義から原子論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ に対しては，(*) は成立する．問題は $\varphi(x_1, ..., x_n)$ が $\exists y\psi(y, x_1, ..., x_n)$ の場合である．

$$\begin{aligned} M \models \exists y\psi(y, a_1, ..., a_n) &\iff M \models \psi(b, a_1, ..., a_n) \;\; (\exists b \in N) \\ &\iff N \models \psi(b, a_1, ..., a_n) \;\; (\exists b \in N) \\ &\iff N \models \exists\psi(y, a_1, ..., a_n) \end{aligned}$$

ここで，１行目の同値性は条件２による．また１行目と２行目の間の同値性は帰納法の仮定による． ∎

以下では集合 A の濃度は $|A|$ で表すことにする．

補題 60. M を L-構造とする．$A \subset M$ に対して，$N \prec M$ で次の条件を満たすものが存在する．

1. $A \subset N$;

2. $|N| \leq |A| + |L| + \aleph_0$

Proof. $A_0 = A$ からはじめて，M の部分集合の上昇列 A_i $(i < \omega)$ を次の条件を満たすように帰納的に構成することができる：各 $i > 0$ に対して，

- $L(A_{i-1})$-論理式 $\varphi(x)$ が M に解を持てばそのうち少なくとも一つは A_i の中にある；

- $|A_i| \leq |A| + |L| + \aleph_0$.

実際，$|A_i| \leq |A| + |L| + \aleph_0$ のとき，$L(A_i)$-論理式の数も $|A| + |L| + \aleph_0$ 以下なので，それらの論理式の解を１つづつ A_i に付加したものを A_{i+1} とすればよい．

最終的にすべての A_i たちが定義された時点で，$N = \bigcup_{i\in\omega} A_i$ とすれば，明らかに濃度の条件２は成立する．Tarski-Vaught の判定条件により，$N \prec M$ となる． ∎

定理 61. （*Löwenheim-Skolem* の定理）T を L-閉論理式の一つの集合とする．T が無限モデルを持てば，任意の基数 $\kappa \geq |L| + \aleph_0$ に対して，T のモデル N で濃度が丁度 κ になるものが存在する．

Proof. M を T の無限モデルとする．補題 58 により，$M^* \succ M$ で濃度が κ 以上になるものが存在する．$A \subset M^*$ を濃度が丁度 κ の集合とする．補題 60 により，A を含む $N \prec M^*$ で濃度が $|A| + |L| + \aleph_0 (= \kappa)$ 以下になるものが存在する．しかし，$N \supset A$ だから $|N| \geq \kappa$．よって，N の濃度は丁度 κ である． ∎

二つの L-構造 M,N がまったく同じ L-閉論理式を満たすとき，それらは elementarily equivalent であるといい，$M \equiv N$ とかく．

系 62. L が可算言語とし，M を L-構造とする．勝手な無限基数 κ に対して，$N \equiv M$, $|N| = \kappa$ となる N が存在する．

4　各種のモデル

4.1　基本拡大鎖とその応用

まず次の例からはじめよう．

例 63. $\{M_i : i \in \omega\}$ を L-構造としての拡大列とする．各 M_i が T のモデルのとき，$\bigcup_{i\in\omega} M_i$ も T のモデルになるだろうか？T が「群の公理」や「体の公理」のときは大丈夫である．しかし，一般には正しくない：各 $i \in \omega$ に対して，$M_i = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq -i\}$ とする．M_i に通常の順序を入れて，$\{<\}$-構造とみる．このとき，

- $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ ($\{<\}$-構造としての拡大列)；
- $M_i \models$ "$<$ は最小元を持つ全順序 "

が成立する．しかし，$\bigcup_{i\in\omega} M_i = \mathbb{Z}$ は最小元は持たない．

定義 64. α を順序数とする．長さ α の L-構造の列 $(M_i)_{i<\alpha}$ が条件

(*) $i < j < \alpha \Rightarrow M_i \prec M_j$.

を満たすとき，基本鎖（elementary chain）と呼ばれる．

定理 65 (基本鎖定理). $(M_i)_{i<\alpha}$ を基本鎖とする．このとき，$M^* = \bigcup_{i<\alpha} M_i$ は自然に L-構造となり，各 M_i は M^* の基本部分構造になる．

Proof. M^* 上に定数記号，関数記号，述語記号の解釈を導入する．c^{M^*} は一定の値 c^{M_i} とする．また，m 変数述語記号 P の解釈は $P^{M^*} = \bigcup_{i<\alpha} P^{M_i}$ とする．n 変数関数記号 F の解釈も（集合論的にかけば）$F^{M^*} = \bigcup_{i<\alpha} F^{M_i}$ とすればよい．

主張　$M_i \prec M^*$

次の命題を $n \in \omega$ に関する帰納法で示せばよい．

$(*)_n$ 任意の $i < \alpha$ と論理記号の数が n 以下の任意の $L(M_i)$-閉論理式 φ に対して次が成立する：$M^* \models \varphi \iff M_i \models \varphi$

$n = 0$ のとき，すなわち φ が原子論理式のときは明らか．帰納法のステージでは，φ が $\exists x\psi(x)$ の形のときが本質的である．(その他の論理記号については演習問題.）($\Rightarrow$): $M^* \models \exists\psi(x)$ とする．このとき，$\psi(x)$ の解 $d \in M^*$ が存在するが，M^* はモデルの和の形をしているので，$d \in M_j$ となる M_j がある．$i < j$ としてよい．帰納法の仮定から $M_j \models \psi(d)$ である．よって，$M_j \models \exists x\psi(x)$. $M_i \prec M_j$ だから $M_i \models \varphi$. 逆向きの矢印 ($\Leftarrow$) はやさしい． ∎

定義 66. （有限充足性とタイプ）

1. M を L 構造とし，$A \subset M$ とする．列 $\bar{x} = x_1, ..., x_n$ を自由変数として持つ $L(A)$-論理式の集合 $\Phi(\bar{x})$ が M において有限充足的であるとは，任意有限個の $\varphi_1(\bar{x}), ..., \varphi_n(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$ に対して，

$$M \models \exists\bar{x}[\varphi_1(\bar{x}) \wedge \cdots \wedge \varphi_n(\bar{x})]$$

   が成立（共通解が存在）することである．$\Phi(\bar{x})$ が有限充足的でなおかつ完全（すなわち任意の $L(A)$- 論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して，$\varphi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$ または $\neg\varphi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$ が成立）のとき，$\Phi(\bar{x})$ は M における A 上のタイプとよばれる．変数の数 n を強調したい場合は n 変数タイプという．

2. A 上のタイプ全体の集合を $S_M(A)$ とかく．M が明らかなときは，省略して $S(A)$ とかく．自由変数が n 個の A 上のタイプの集合を $S^n(A)$ とかくことがある．

3. $p \in S(A)$ のとき，A をタイプ p の領域（domain）とよび，$\mathrm{dom}(p)$ であらわす．

4. $p(x)$ に属するすべての $\varphi(x)$ を満たす元を $p(x)$ の解という．（解は M の中に存在するとは限らない．）

例 67. *1.* $\mathbb{N}$ を $\{<, +, 1\}$-構造とみる．$\Phi(x) = \{x > 1, x > 1 + 1, x > 1+1+1, \ldots\}$ は $\mathbb{N}$ で有限充足的である．しかし，$\mathbb{N}$ に解を持たない．

2. もう少し数学っぽい例．$\bar{\mathbb{Q}}$ を代数的数の全体とする．「x は $\mathbb{Q}$ 上の超越数である」という条件は

$$\Phi(x) = \{f(x) \neq 0 : f \text{ は } \mathbb{Q}\text{-係数の自明でない多項式}\}$$

という論理式の集合であらわされる．各多項式は有限個の解しか持たないので，$\Phi(x)$ は $\bar{\mathbb{Q}}$ で有限充足的である．しかし，$\Phi(x)$ の解は $\bar{\mathbb{Q}}$ にない．（拡大体の中には存在する．）

補題 68. M を L-構造として，$L(A)$-論理式の集合 $\Phi(\bar{x})$ は M で有限充足的とする．$\Phi(\bar{x})$ は A 上のタイプに拡大される．

Proof. $\Phi(x)$ を拡大した有限充足的な集合のうち極大なものが存在する（Zorn の補題）．この極大集合がタイプになっている． ∎

問 69. $p(x)$ を M におけるタイプとする．c を新しい定数記号として，$T = Th(M, a)_{a \in M} \cup p(c)$ を考える．T はモデルを持つことを示せ．（$p(c)$ は $\{\varphi(c) : \varphi(x) \in p(x)\}$ のことである．）

問 70. $A \subset M \prec M^*$ とする．$L(A)$-論理式の集合 $p(\bar{x})$ に対して，$p(\bar{x})$ が M においてタイプになることと M^* においてタイプになることは同値である．

次の補題はコンパクト性定理の簡単な応用である．

補題 71. M を L-構造とする．κ を無限基数とする．このとき，次の条件を満たす基本拡大 $M^* \succ M$ が存在する：

(*) M^* におけるタイプ p が $\mathrm{dom}(p) \subset M$, $|\mathrm{dom}(p)| < \kappa$ を満たせば M^* に解を持つ．

Proof. S を M におけるタイプで条件 $|\mathrm{dom}(p)| < \kappa$ を満たすもの全体の集合とする．$p \in S$ に対して，新しい定数記号 c_p を用意して，

$$T^* = Th(M, a)_{a \in M} \cup \bigcup_{p \in S} p(c_p)$$

なる閉論理式の集合を考える．右辺第 2 項は各 c_p が p の解になることを主張している．T^* の各有限部分はモデルを持つので（M に定数記号 c_p たちの解釈を追加した形のモデルでよい），コンパクト性定理により T^* 全体もモデル M^* を持つ．M^* は $Th(M, a)_{a \in M}$ のモデルだから $M^* \succ M$ である．c_p の解釈が p の解になっているから，M^* は S に属する各タイプの解を少なくとも 1 つ持つ． ∎

上で構成したモデル M^* は domain が M に属するタイプのうち，domain の大きさが小さい（κ 未満の）ものに対する解を持っている．しかし，domain が小さくても M からはみ出るものについては解があるかどうかはわからない．

定義 72. （飽和性）M を L-構造とし，κ は無限基数とする．M が $|\mathrm{dom}(p)| < \kappa$ なるすべてのタイプ p の解を持つとき，κ-飽和 (κ-saturated) であるといわれる．

定理 73. M を L-構造とし，κ は無限基数とする．M の拡大 $M^* \succ M$ で κ^+-飽和なものが存在する．

Proof. $M_0 = M$ から始まる基本鎖 $(M_i)_{i<\kappa^+}$ を以下の条件が成り立つように作る：

1. $A \subset M_i$, $|A| < \kappa^+$ ならば A 上のすべてのタイプは M_{i+1} に解を持つ．
2. δ が極限順序数のときは，$M_\delta = \bigcup_{i<\delta} M_i$.

補題 71 と基本鎖の性質 65 により，このような基本鎖は存在する．$M^* = M_{\kappa^+}$ が求める κ^+-飽和な構造である．実際，$A \subset M^*$ を濃度が κ 以下の集合とすれば，$A \subset M_i$ となる $M_i \prec M^*$ が存在する．したがって，A 上のすべてのタイプは $M_{i+1} \prec M^*$ で解を持つ．（A 上のタイプの概念は M_{i+1} で考えても M^* で考えても同じになることに注意.） ∎

注意 74. L が可算の場合を考える．可算構造 M からはじめることにより，上の命題による構成を行う．このとき，κ^+-飽和な $M^* \succ M$ で濃度が 2^κ なものを作ることができる．

定義 75. M を L-構造とする．$\bar{a} = a_1, ..., a_n \in M$ および $A \subset M$ に対して，

$$\mathrm{tp}_M(\bar{a}/A) = \{\varphi(\bar{x}) : \varphi(\bar{x}) \text{ は } M \models \varphi(\bar{x}) \text{ となる } L(A)\text{-論理式 }\}$$

を（M における）$\bar{a}$ の A 上のタイプという．M が明らかなときは省略する．

この表記のもとに，A 上のタイプ $p(\bar{x})$ が M に解を持つということは $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = p(\bar{x})$ となる $\bar{a} \in M$ が存在することと書きなおすことができる．また M が κ-飽和であることは，濃度が κ 未満の $A \subset M$ 上のタイプはすべて $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ $(\bar{a} \in M)$ の形でかけることと同値になる．

問 76. $M \equiv N$ を $\aleph_0$-飽和な L-構造とする．$\mathrm{tp}_M(\bar{a}) = \mathrm{tp}_N(\bar{b})$ なるとき，勝手な $a \in M$ に対して，適当に $b \in M$ を選べば，$\mathrm{tp}_M(\bar{a}, a) = \mathrm{tp}_N(\bar{b}, b)$ とできる．（ヒント：$p(\bar{x}, x) = \mathrm{tp}_M(\bar{a}, a)$ とする．条件）$\mathrm{tp}_M(\bar{a}) = \mathrm{tp}_N(\bar{b})$ から $p(\bar{b}, x)$ は N におけるタイプとなり，飽和性から解 $b \in N$ を持つ．このとき，$\mathrm{tp}(\bar{a}, a) = \mathrm{tp}(\bar{b}, b)$ である．M と N が *elementarily equivalent* という仮定は，$\bar{a}$,$\bar{b}$ が空列の場合に使われる．）

4.2 タイプ排除定理

この節では L は可算とし，T はモデルを持つ L-閉論理式の集合とする．この節での可算性の仮定は本質的である．特にタイプの排除定理はこの仮定なしには成り立たない．

前節では，なるべく多くのタイプが解を持つように構造を拡大することを考えてた．ここでは，その反対になるべくタイプが解を持たないように構造を作りたい．

定義 77. $\Sigma(x)$ を L-論理式の集合とする．

1. 次の条件を満たす L-論理式 $\varphi(x)$ があるとき，$\Sigma(x)$ は T で isolate されるという：
   (a) $T \cup \{\exists \varphi(x)\}$ はモデルを持つ；
   (b) 任意の T のモデル M において，$\varphi(x)$ の解はすべて $\Sigma(x)$ の解になる．（このことを $T \models \forall x[\varphi(x) \to \Sigma(x)]$ とかく．）

2. $\Sigma(x)$ が M に解を持たないとき，$\Sigma(x)$ は M で排除（omit）されるという．

上の定義から直ちに，T が完全でなおかつ $\Sigma(x)$ が T で isolate されるとき，任意の T のモデルは $\Sigma(x)$ の解を持つことがわかる．

定理 78. （タイプの排除定理）T で $\Sigma(x)$ が *isolate* されなければ，$\Sigma(x)$ を排除する T のモデルが存在する．

Proof. L に属さない可算個の新しい定数記号 $\{c_i : i \in \omega\}$ を用意する．$L_i = L \cup \{c_j : j < i\}$ とおく．$L \cup \{c_i : i \in \omega\}$ に属する 1 変数論理式を一列にならべて $\varphi_i(x)$（$i \in \omega$）とする．ただし，φ_i は L_i-論理式になるようにしておく．L_i-閉論理式の集合 $T_0 = T$ からはじめて T_i（$i \in \omega$）を次のように定義してゆく：

(*) $T_{i+1} = T_i \cup \{\exists x \varphi_i(x) \to \varphi_i(c_i)\} \cup \{\neg\sigma_i(c_i)\}$,

ただし $\sigma_i(x) \in \Sigma(x)$ は T_{i+1} がモデルを持つようにとる．

主張　実際，T_{i+1} がモデルを持つように $\sigma_i \in \Sigma$ はとれる．

$\sigma_i \in \Sigma$ の取り方によらず，T_{i+1} がモデルを持たない（最小の）i があったとする．このとき，T_i の T 以外の部分をまとめて（$\wedge$ でつなげて）$\theta(\bar{c})$ とかけば，

$$T \models \forall x[\theta(x, \bar{c}) \wedge (\exists x \varphi_i(x) \to \varphi_i(c_i)) \to \Sigma(x)]$$

を得る．$\bar{c}$ は T に属さない定数記号の列なので，

$$T \models \forall x[\exists \bar{y} \theta(x, \bar{y}) \to \Sigma(x)].$$

これは Σ が T で isolate されることを意味するので矛盾．(主張の証明終わり)

以上から，T_i たちが構成された．$T^* = \bigcup_{i \in \omega} T_i$ とおいて，$M^* \models T^*$ をとる．M^* の中の必要な部分 $M = \{c_i^{M^*} : i \in \omega\}$ だけを抜き出す．条件 (*) から Tarski-Vaught の判定条件により，$M \prec M^*$ がわかる．また各 c_i に対して，$\neg\sigma_i(c_i)$ となる $\sigma_i \in \Sigma$ があるので，M は Σ の解を持たない．∎

問 79. （拡張されたタイプの排除定理）$\Sigma_i(x) (i \in \omega)$ を T で isolate されない論理式の集合とする．このとき，すべての $\Sigma_i(x)$ を排除する T のモデルが存在する．これを示せ．

例 80. M を（論理式でかかれた）ペアノ公理系の可算モデルとする．N が M の elementary end extension であるとは，(i) $M \prec N$, (ii) $a \in M, b \in N, b < a \Rightarrow b \in M$ が成り立つことである．すなわち，N は M の基本拡大だが，増えている元は M の後ろだけに現れている．M の（真の）elementary end extension は存在する．

Proof. c を新しい定数記号として言語 $L(M)$ に付加する．この新しい言語における理論 T^* を

$$T^* = Th(M, a)_{a \in M} \cup \{c > a : a \in M\}$$

とする．T^* のモデルは M の真の elementary extension となる．

Claim 1 $\varphi(x)$ を $L(M)$-*formula* とする．$T^* \cup \{\varphi(c)\}$ が *consisitent* になる必要十分条件は

$$M \models \exists^\infty y \varphi(y)$$

となることである．

$T^* \cup \{\varphi(c)\}$ が consistent とすれば，T^* のモデルで，$M^* \models \varphi(c)$ となるものが存在する．$a \in M$ が与えられたとき，$M^* \models \exists y[y > a \wedge \varphi(y)]$（$c$ がその解）だから，

$$M \models \exists y[y > a \wedge \varphi(y)].$$

$a \in M$ は任意なので，このことは $M \models \exists^\infty y \varphi(y)$ を意味する．

さて，$b \in M$ に対して，(partial) type $\Sigma_b(x)$ を

$$\Sigma_b(x) = \{x < b\} \cup \{x \neq d : d \in M, d < b\}$$

とする．次の主張がいえればよい（拡張されたタイプの排除定理）．

Claim 2 $\Sigma_b(x)$ は T^* において *isolate* されない．

$\Sigma_b(x)$ が $\varphi(x, c)$ によって isolate されたとする．すなわち，

1. $T^* \cup \{\varphi(x, c)\} \vdash x < b$;
2. $T^* \cup \{\varphi(x, c)\} \vdash x \neq d \quad (\forall d <_M b)$

条件 1 より，特に $\exists x < b\ \varphi(x, c)$ は T^* と consistent．したがって，Claim 1 により，

$$M \models \exists^\infty y\ \exists x < b\ \varphi(x, y).$$

b 未満の M の元は（M の意味で）有限個なので，部屋割り論法により，

$$M \models \exists x < b\ \exists^{\infty} y\ \varphi(x, y). \tag{1}$$

$$M \models \exists^{\infty} y\ \varphi(d, y)\ \ \text{(for some } d \in M \text{ with } d < b) \tag{2}$$

このことは，主張 1 により，次の集合が consisitent になることを示す．

$$T^* \cup \{\varphi(x, c)\} \cup \{x = d\}.$$

これは条件 2 に反する． ∎