$b$ 未満の $M$ の元は（$M$ の意味で）有限個なので，部屋割り論法により，

$$M \models \exists x < b\ \exists^{\infty} y\ \varphi(x, y). \tag{3}$$

$$M \models \exists^{\infty} y\ \varphi(d, y) \quad (\text{for some } d \in M \text{ with } d < b) \tag{4}$$

このことは，主張 1 により，次の集合が consisitent になるこを示す．

$$T^* \cup \{\varphi(x, c)\} \cup \{x = d\}.$$

これは条件 2 に反する． $\square$

# 7 量化記号消去とモデル完全性

## 7.1 準備

**定義 98.** 1. $\Delta$ を $L$-論理式の集合とする．$T$ が $\Delta$-消去性（$\Delta$-elimination）を持つとは，$T$ のもとで任意の論理式 $\varphi(\bar{x})$ が $\Delta$ に属する論理式 $\psi(\bar{x})$ と同値になることである．

2. $T$ が量化記号消去を許すとは，$T$ のもとで，任意の論理式 $\varphi(\bar{x})$ が量化記号を持たない論理式 $\psi(\bar{x})$ と同値になることである．

3. $M \equiv_{\Delta} N \Leftrightarrow$ 任意の閉論理式 $\varphi \in \Delta$ に対して，$M \models \varphi \iff N \models \varphi$．$\Delta$ が閉論理式全体のときは，$M \equiv N$ とかく．

**注意 99.** 1. $QF$ を量化記号を持たない論理式全体とする．このとき，$T$ が量化記号を消去することと，$T$ が $QF$-elimination を持つこととは同値である．

2. 量化記号のない閉論理式が存在しなければ，量化記号消去が絶対に不可能になってしまう．このことを回避するための方法はいくつかあるが，ここでは $L$ が定数記号を少なくとも一つ含むとする．

**命題 100.** $\Delta$ はブール結合（*Boolean combination*）で閉じているとする．このとき次は同値である．

*1.* $T$ が $\Delta$-*elimination* を持つ．

*2.* 任意の $M, N \models T$，および同じ長さの $\bar{a} \in M$，$\bar{b} \in N$ に対して，

$$(M, \bar{a}) \equiv_{\Delta} (N, \bar{b}) \ \Rightarrow\ (M, \bar{a}) \equiv (N, \bar{b}).$$

*Proof.* $(1 \Rightarrow 2)$ は明らかである．

$(2 \Rightarrow 1)$ を示す．1 でないとする．このとき，論理式 $\varphi(\bar{x})$ で，どんな $\Delta$-論理式とも同値にならないものが存在する．

$$\Psi = \{\psi(\bar{x}) \in \Delta : T \models \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}))\}$$

とする．

**主張 A.** $T \cup \{\varphi(\bar{x})\} \cup \{\neg\psi(\bar{x}) : \psi(\bar{x}) \in \Psi\}$ は整合的である．

整合的でないとすれば，有限個の $\psi_1, ..., \psi_m \in \Psi$ を選んで，

$$T \models \forall \bar{x}[\varphi(\bar{x}) \to \bigvee \psi_i(\bar{x})].$$

$\Psi$ の定義から，$\bigvee \psi_i(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})$ も $T$ のもとで成立する．よって，$\varphi(\bar{x})$ は $\Delta$-論理式 $\bigvee \psi_i(\bar{x})$ と同値になる．これは矛盾である．(Claim A の証明終わり)

このことから，$M \models T$ および $\bar{a} \in M$ を

- $M \models \varphi(\bar{a})$,
- $M \models \neg\psi(\bar{a})$ $(\forall \psi \in \Psi)$

となるように選ぶ．$\Gamma(\bar{x})$ を $\bar{a}$ によって満たされる $\Delta$-タイプとする．すなわち，

$$\Gamma(\bar{x}) = \mathrm{tp}_\Delta(\bar{a}) = \{\psi(\bar{x}) \in \Delta : M \models \psi(\bar{a})\}.$$

**主張 B.** $T \cup \{\neg\varphi(\bar{x})\} \cup \Gamma(\bar{x})$ は整合的である．

整合的でないとすれば，$\psi_1(\bar{x}), ..., \psi_n(\bar{x}) \in \Gamma$ を選んで，

$$T \models \forall \bar{x}[\bigwedge \psi_i(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})].$$

よって，$\bigwedge \psi_i(\bar{x}) \in \Psi$．したがって，$\bar{a}$ の性質から，$M \models \neg(\bigwedge \psi_i(\bar{a}))$．このことは，いずれかの $\psi_i(\bar{x})$ が $\Gamma$ に属さないことを意味する．矛盾である．(Claim B の証明終わり) □

この Claim により，$N \models T$ と $\bar{b} \in N$ を

- $N \models \neg\varphi(\bar{b})$,
- $N \models \psi(\bar{b})$ $(\forall \psi \in \Gamma)$.

$(M, \bar{a})$ と $(N, \bar{b})$ は条件 2 の反例を与える．

**系 101.** 任意の $M, N \models T$ および $\bar{a} \in M$, $\bar{b} \in N$ に対して，

$$(M, \bar{a}) \equiv_{QF} (N, \bar{b}) \Rightarrow (M, \bar{a}) \equiv (N, \bar{b})$$

が成立すれば，$T$ は量化記号の消去を許す．また $T$ が原子閉論理式に対して完全ならば，$T$ は完全である．

Proposition と全く同じ論法で，次を示すことができる．

**系 102.** $\Delta \subset \Delta^*$ として，$\Delta$ はブール結合で閉じているとする．このとき，任意の $M, N \models T$ と $\bar{a} \in M$，$\bar{b} \in N$ に対して，

$$(M, \bar{a}) \equiv_{\Delta} (N, \bar{b}) \ \Rightarrow \ (M, \bar{a}) \equiv_{\Delta^*} (N, \bar{b}).$$

が成立すれば，各 $\Delta^*$-論理式はそれと同値な $\Delta$-論理式を持つ．

言語 $L$ を拡大して，量化記号消去を許す $T^* \supset T$ を作ることができる．

**命題 103.** 各論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して，同じ個数の変数を持つ述語記号 $R_\varphi(\bar{x})$ を用意する．それらを全て $L$ に付加してできる言語を $L^*$ とする．

$$T^* = T \cup \{\forall \bar{x}[\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow R_\varphi(\bar{x})] : \varphi \text{ は } L\text{-論理式 }\}.$$

このとき，$T^*$ は（言語 $L^*$ において）量化記号消去を許す．

*Proof.* $\psi(\bar{x})$ を $L^*$-論理式とする．$\psi$ の中に現れる $R_\varphi$ たちを $\varphi$ で置き換えてできる論理式を $\theta(\bar{x})$ とする．$T^*$ の定義から，

$$T \models \forall \bar{x}[\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \theta(\bar{x})]$$

である．また，$\theta(\bar{x})$ は $L$-論理式なので，再び $T^*$ の定義から，$\theta(\bar{x})$ と $R_\theta(\bar{x})$ は同値になる．よって，$\psi(\bar{x})$ と $R_\theta(\bar{x})$ が同値になる． $\square$

**注意 104.** $T^*$ は $T$ の拡大であるが，$L$-論理式に関しては，その帰結となる範囲が $T$ と変わらない：$L$-論理式 $\varphi$ が $T^* \models \varphi$ とする．いま $T \cup \{\neg\varphi\}$ が整合的とする．このとき，そのモデル $M$ が存在するが，$M$ は各 $R_\psi$ に対する解釈を自明に決めることにより，$M \models T^*$ とすることができる．したがって，$M \models \varphi$ でなければならない．これは矛盾である．

**定義 105.** 1. $T$ がモデル完全 (model complete) であるとは，任意のモデル $N \models T$ とその部分モデル $M \models T$ に対して，

$$M \prec N$$

となることである．

2. $T$ が部分構造完全 (substructure complete) であるとは，任意の $N \models T$ の任意の部分構造 $A$ に対して，$T \cup Diag(A)$ [1]が完全になることである．

**注意 106.** *1.* $T$ がモデル完全になることは，任意の $M \models T$ に対して，$T \cup Diag(M)$ が（言語 $L(M)$ に対して）完全になることと同値である．

*2.* $T$ が量化記号消去を許せば，部分構造完全である：証明は明らか．

## 7.2 量化記号消去と同値な条件

$\exists^*$ は $\exists x(\theta_1 \wedge .... \wedge \theta_n)$ の形の論理式（各 $\theta_i$ は原子論理式またはその否定となっている）全体の集合とする．パラメータ $A$ を持つ $\exists^*$-論理式の全体を $\exists^*(A)$ とかく．

**定理 107.** $T$ に関する次の条件は同値である：

*1.* $T$ は量化記号消去を許す．

*2.* $T$ は部分構造完全である．

*3.* 任意の $M, N \models T$ と共通部分構造 $A \subset M \cap N$ に対して，

$$M \equiv_{\exists^*(A)} N.$$

*Proof.* $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ は明らかである．

$3 \Rightarrow 1$. $\exists^*$-論理式が量化記号消去できれば，すべての論理式が量化記号消去できる（論理式の構成に関する帰納法）．したがって，Corollary 102 により，次を示せばよいことがわかる．

[1] $Diag(A)$ は言語 $L(A)$ で記述された $A$ の diagram．すなわち，$L(A)$-原子閉論理式またはその否定で $A \models \varphi$ となるもの全体.

任意の $M,N \models T$ と $\bar{a} \in M$，$\bar{b} \in N$ に対して，

$$(M,\bar{a}) \equiv_{QF} (N,\bar{b}) \ \Rightarrow \ (M,\bar{a}) \equiv_{\exists^*} (N,\bar{b}).$$

これを示そう．左辺の条件により，$\bar{a}$ と $\bar{b}$ は同じ原子論理式（とその否定）を満たす．したがって，それらにより生成される構造 $A$ は同一視が可能で，$A \subset M \cap N$ と考えることができる．このとき，3 の条件により，$M \equiv_{\exists^*(A)} N$ を得る．よって $(M,\bar{a}) \equiv_{\exists^*} (N,\bar{b})$ を得る． □

**注意 108.** *Theorem 107* の条件 3 に現れる $A$ は，有限生成のものだけに限ってもよい（$3 \Rightarrow 1$ の証明から明らか）．

**例 109.** *1.* $T = Th(\mathbb{N}, 0, S)$ は量化記号消去を許す．ただし，$S$ は $x$ に対して，$x+1$ を対応させる関数．$M,N \models T$ とする．$\bar{a} \in M$, $\bar{b} \in N$ を $(M,\bar{a}) \equiv_{\mathrm{QF}} (N,\bar{b})$ なる元の有限列とする．$M \prec M^*$ と $N \prec N^*$ を $\bar{a}$，$\bar{b}$ と関係しないコンポーネントが同じ濃度だけある拡大とする．このとき，同型写像 $\sigma : M^* \to N^*$，$\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$ が存在する．よって $(M,\bar{a}) \equiv (N,\bar{b})$ を得る．

## 7.3 代数閉体

言語を $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$（環の言語）とする．$L$ を使って体の公理 $T_{\mathrm{field}}$ を記述できる．代数閉体の公理 $ACF$ は，$T_{\mathrm{field}}$ に次の形の閉論理式 ($n = 1, 2, ...$) をすべて付加したものである．

$$\forall y_0 ... \forall y_{n-1} \exists x (x^n + y_{n-1}x^{n-1} + \cdots + y_1 x + y_0 = 0).$$

さらに以下のように標数 $p$ の情報を付け加えたものを $ACF_p$ とかく（$p = 0$ または正）．

- $p = 0$: $1 + 1 \neq 0,\ 1 + 1 + 1 \neq 0, \cdots$.
- $p > 0$: $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p} = 0$

**注意 110.** *1.* $\mathbb{C} \models ACF_0$.

*2.* $ACF$ のモデルは無限体である．実際に，$F$ を有限体とすれば，方程式 $1 + \prod_{a \in F}(x - a) = 0$ は $F$ に解を持たない．

体についての復習．$K$ を体として，$K[x]$ を一変数多項式環とする．

1. $f \in K[x]$ に対して，$\deg(f)$ は $f$ の次数を表す．定数多項式 $(\neq 0)$ の次数は $0$，$0$ 多項式の次数は $-\infty$ とする．

2. 体の拡大 $K < M$，元 $a \in M$ に対して，$a$ の $K$ 上最小多項式とは最高次係数が $1$ の多項式 $f(x) \in K[x]$ で，$M \models f(a) = 0$ となるものである． $g(x) \in K[x]$ を $g(a) = 0$ となる多項式とすれば，$g(x)$ は最小多項式 $f(x)$ で割り切れる： $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$ $(\deg r < \deg f)$ とする．$g(a) = f(a) = 0$ なので，$r(a) = 0$ でなければならない．しかし，$f$ の次数が最小なので，$r = 0$（$0$ 多項式）でなければならない．

3. 最小多項式は既約多項式である．したがって，$f(x) \in K[x]$ が（$a$ の）最小多項式のとき，$f(x) = 0$ を満たす任意の $b$ に対しても $f(x)$ は最小多項式になる．

4. $K$ の部分構造は整域になる．

5. $A$ が整域のとき，$A$ を含む最小の体 $Q(A)$ が存在する．

**補題 111.** $A$ を整域とする．また $\psi(x) \in QF(A)$（量化記号のない $A$ 上論理式）とする．このとき，次のいずれかが成立する．

*1.* $\psi(x)$ は $A$ の拡大体に解を持たない．

*2.* 任意の拡大体 $K \supset A$ において，$\psi(K)$ は補有限集合 *(cofinite set)* である．

*3.* 最小多項式 $f(x) \in Q(A)[x]$ が存在して，任意の拡大体 $K \supset A$ において，
$$\forall x(f(x) = 0 \to \psi(x)).$$

2 または 3 の場合は，任意の代数閉体において $\psi(x)$ は解を持つ．

**注意 112.** $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ に対して，補題が成立すれば，$\psi_0(x) \vee \psi_1(x)$ に対しても補題が成立する．

*Proof.* $Q(A)$ 上の原子論理式と同値な $A$ 上の原子論理式が存在するので，$A = Q(A)$ としてよい．また，上の remark により，$\psi(x)$ は

$$\bigwedge_{i \in I} t_i(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j \in J} u_j(x) \neq 0$$

の形としてよい．0 次多項式は省いておく．[2]

**Case 1** $I = \emptyset$. このときは，$\psi(x)$ は明らかに補有限集合を定義する[3]. よって 2 が成立する．

**Case 2** $I \neq \emptyset$. 1 でないとしてよい．$\psi(x)$ の解が存在する拡大体 $K \supset A$ が存在したとする．$a$ が $\psi(x)$ の解とする．$f(x)$ を $a$ の $A$ 上最小多項式とすれば，$t_i(x)$ は $f(x)$ で割り切れる．また $f(x) = 0$ を満たす元は $u_j(x) = 0$ を満たすことはない（そのような元がどこかにあれば，$u_j(x)$ は $f(x)$ で割り切れるので，$\psi$ を満たす拡大体が存在しない）．よって 3 が成立する．□

**定理 113.** $ACF_p$ は完全で量化記号消去を許す.

*Proof.* 量化記号消去を許すことが示されれば，完全性は自動的にわかる．Theorem 107 の $3 \Rightarrow 1$ を利用する．そのために，$M, N \models ACF_p$ と共通部分整域 $A \subset M \cap N$ が与えられたとき，

$$M \equiv_{\exists^*(A)} N.$$

を示す．$\exists x \psi(x)$ を $\exists^*(A)$-閉論理式として，$M \models \exists x \psi(x)$ とする．このとき，補題により，$\psi(x)$ は $A$ の拡大となる任意の代数閉体で解を持つ．したがって，$N$ でも持つ．よって，$N \models \exists x \psi(x)$ を得る．対称性から，$M \equiv_{\exists^*(A)} N$ を得る．□

**注意 114.** 上と同じ証明で $ACF$ が量化記号消去を許すのはわかる．標数 $p$ が決定していれば，閉原子論理式の真偽が決定し，$ACF_p$ の完全性が得られる．

## 7.4 体論への応用

**事実 115.** 任意の体は代数閉体へ拡大される．

---

[2] すべてが 0 次多項式ならば，それらは $A$ 上の QF 閉論理式で，真偽は $A$ 上ですでに決まっている．よって 1，2 のいずれかが成立する．

[3] 代数方程式の解は有限個.

*Proof.* 代数拡大を繰り返し行えばよい． □

**補題 116.** (Hilbert) $K$ を体とする．$f_1(\bar{x}) = 0, ..., f_n(\bar{x}) = 0$ を $K[\bar{x}]$-多項式による方程式系とする．このとき，次は同値である．

1. $f_1(\bar{x}) = 0, ..., f_n(\bar{x}) = 0$ が共通解を持つ体の拡大 $M > K$ が存在する．

2. $f_1(\bar{x}) = 0, ..., f_n(\bar{x}) = 0$ は任意の代数閉体 $M > K$ で解を持つ．

*Proof.* $(2 \Rightarrow 1)$ は上の事実により自明である．

$(1 \Rightarrow 2)$: 1を仮定する．事実により，$M$ は代数閉体としてよい．任意の代数閉体 $N > K$ を考える．$ACF_p$（$p = ch(K)$）が部分構造完全なので，$M \equiv_{L(K)} N$ である．したがって，$f_1(\bar{x}) = 0, ..., f_n(\bar{x}) = 0$ は $N$ においても共通解を持つ． □

**定理 117.** (Hilbert の零点定理–weak Nullstellensatz) $R = K[\bar{x}]$ を体 $K$ 上の多項式環とする．$f_1(\bar{x}), ..., f_n(\bar{x}) \in R$ で生成されるイデアル $I$ が真のイデアル（$R$ に一致しない）とする．このとき，$K < M \models ACF$ なる任意の拡大において，

$$M \models \exists \bar{x}(\bigwedge_{i=1,...,n} f_i(\bar{x}) = 0).$$

*Proof.* $I^* \supset I$ を極大イデアルとする．$R/I^*$ は $K$ の拡大体となる（$a \in K \mapsto a + I^* \in R/I^*$ の kernel は 0 となることに注意）．$\bar{x} = x_1, ..., x_m$ とするとき，$R/I^*$ の元

$$[x_1] = x_1 + I^*,\ \dots\ , [x_m] = x_m + I^*, [0] = 0 + I^*$$

を考える．このとき，

$$f_i([x_1], ..., [x_m]) = [0] \iff f_i(x_1, ..., x_n) \in I^*.$$

しかし，右辺は成立している．したがって，$R/I^*$ において $[x_1], ..., [x_m]$ が $f_1 = 0, ..., f_n = 0$ の共通解になっている．したがって，補題 116 により，定理が証明された． □

**定義 118.** $J$ を $K[\bar{x}]$ のイデアルとする．

1. $V(J)$ を $J$ に属する多項式の共通零点とする．すなわち

$$V(J) = \{\bar{a} \in K : (\forall f \in J) f(\bar{a}) = 0\}.$$

2. $X \subset K^n$ に対して，$I(X)$ を $X$ 上で，常に $0$ となる $K[\bar{x}]$ 多項式全体とする（$lh(\bar{x}) = n$）．

**注意 119.** 1. $I(X)$ は $K[\bar{x}]$ のイデアルになる．

2. $I(V(J)) \supset J$. 次の定理は，弱い意味での逆を与える．

**定理 120.** (Hilbert の零点定理–Nullstellensatz) $K \models ACF$ とする．$J$ を $K[\bar{x}]$ のイデアルとする．このとき，

$$f(\bar{x}) \in I(V(J)) \quad \Rightarrow \quad f(\bar{x})^n \in J \quad (\exists n).$$

*Proof.* $f(\bar{x}) \in I(V(J))$ として，$F = \{f, f^2, f^3, ...\}$ とおく．示すべきは $F \cap J \neq \emptyset$. $F \cap J = \emptyset$ として，矛盾を導く．

$$F \cap J^* = \emptyset, \quad J \subset J^*$$

なるイデアル $J^*$ の中で極大なものをとる（Zorn の補題により可能，$J^*$ は極大イデアルとは限らない）．

**主張 A.** $J^*$ は素イデアルになる．したがって $K' = K[\bar{x}]/J^*$ は $K$ を拡大する整域になる．

$g, h \notin J^*$ とする．このとき，$J^*$ の極大性により，$f^m = ug + v$, $f^n = u'h + v'$ となる $m, n \in \omega$, $u, u' \in K[\bar{x}]$, $v, v' \in J^*$ が存在する．よって，$f^{m+n} = (uu')(gh) + (ugv' + u'hv + vv')$ となり，$ugv' + u'hv + vv' \in J^*$ に注意すると，$gh \notin J^*$ になることが分かる.（Claim A の証明終わり）

Hilbert の基底定理により，$J$ は有限生成なので，生成元 $g_1, ..., g_k$ がとれる．$f \in I(V(J))$ より，$K \models \forall \bar{u}(\bigwedge g_i(\bar{u}) = 0 \to f(\bar{u}) = 0)$. $K'$ の代数閉包を $K^*$ とする．$K \prec K^*$ により，$K^* \models \forall \bar{u}(\bigwedge g_i(\bar{u}) = 0 \to f(\bar{u}) = 0)$. $K' \subset K^*$ だから，

$$K' \models \forall \bar{u}(\bigwedge g_i(\bar{u}) = 0 \to f(\bar{u}) = 0).$$

$\bar{x} = x_1, ..., x_m$ とするとき，$[x_1], ..., [x_n] \in K'$ は $J$ に属する多項式の共通零点．よって，上の式から，$K' \models f([x_1], ...[x_m]) = [0]$ が成立しなければならない．しかし，$f \notin J^*$ なのでこれは矛盾である． □

## 7.5 モデル完全性

**定義 121.** $T$ がモデル完全（*model complete*）であるとは，

$$\left.\begin{array}{c} M \subset N\ (\text{部分構造}) \\ M \models T \\ N \models T \end{array}\right\} \Rightarrow M \prec N$$

が常に成立することである．

上のモデル完全性の定義は，部分構造が必ず基本部分構造になることを主張している．一般には $T$ が完全であっても，部分構造が基本部分構造になるとは限らない：

**例 122.** $T = Th(\mathbb{N}, <)$ とする．もちろん，$\mathbb{N}$ 自体は $T$ のモデルであるが，$M = \mathbb{N} - \{0\}$ も $T$ のモデルとなる．しかし，$M \prec \mathbb{N}$ ではない．実際，1 は最小元という命題（$L(M)$-論理式でかける）は $M$ では正しいが，$\mathbb{N}$ では正しくない．

**例 123.** $F$ を 2 元 $a, b$ で生成される自由群として，$T = Th(F, e, * \cdot *, *^{-1})$ を考える．$a^2, b$ で生成される部分群 $G$ も $F$ と同型になるから，$T$ のモデルである．しかし，論理式 $\exists x[x^2 = a^2]$ は $F$ では成立するが，$G$ では成立しないので，$G \prec F$ ではない．

**問 124.** $T$ がモデル完全で，$M \models T$ のとき，$T \cup Diag(M)$ は完全になることを示せ．

では，どういう状況のときにモデル完全になるのだろうか？

**注意 125.** $T$ が量化記号の消去を許せば，モデル完全である．$M, N$ をともに $T$ のモデルとする．$\varphi(\bar{a})$ を $L(M)$-論理式 $(\bar{a} \in M)$ とする．このとき，$T$ のもとに $\varphi(\bar{a})$ と同値になる量化記号を持たない論理式 $\psi(\bar{a})$ が存在する．このとき，量化記号のない論理式は $M$ で成立することと，$N$ で成立することに差がないので次が成立する：

$$\begin{aligned} M \models \varphi(\bar{a}) &\iff M \models \psi(\bar{a}) \\ &\iff N \models \psi(\bar{a}) \\ &\iff N \models \varphi(\bar{a}) \end{aligned}$$

**注意 126.** $T$ がモデル完全であっても，完全になるとは限らない．$ACFp$ $= ACF +$ “ 標数$=p$ ” を考える．$ACF$ のモデル $M$ の部分モデル $N$ は $M$ と同じ標数を持つ．したがって，$ACF_p$ が完全で量化記号の消去を許すことを考えると $ACF$ はモデル完全である．しかし，標数には言及していないので完全ではない．

**問 127.** 無限個の元があることを主張する閉論理式の集合を $T$ とする．言語 $L = \{c, d\}$（定数記号の集合）において $T$ を考えるとき，$T$ は完全でないが，モデル完全になる．これを示せ．

次の定理を述べる前に，言葉の定義をしておく．論理式が $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \varphi(x_1, ..., x_n, \bar{y})$ の形でなおかつ $\varphi$ の部分に量化記号が現れないとき，その論理式は $\forall$ -型と呼ばれる．同様に $\exists$-型論理式も定義する．

**定理 128.** $T$ に関する次の条件は同値である．

*1.* $T$ はモデル完全である．

*2.* $T$ のもとで，すべての論理式は $\exists$-型の論理式と同値である．

*3.* $T$ のもとで，すべての論理式は $\forall$-型の論理式と同値である．

*Proof.* Proof. 2 と 3 の同値性は明らかである．
$2, 3 \Rightarrow 1$：2 と 3 を仮定する．$M \subset N$ を $T$ の二つのモデルとすると，$\psi$ が $\forall$-型の $L(M)$-論理式の場合は，$N \models \psi \Rightarrow M \models \psi$ がいえることに注意する．このことを使えば，仮定 3 により，勝手な $L(M)$-論理式 $\varphi$ に対して，$N \models \varphi \Rightarrow M \models \varphi$ となる．同様に $\varphi$ が $\exists$-型と同値になることを使えば，$M \models \varphi \Rightarrow N \models \varphi$ が成立する．
$1 \Rightarrow 3$: 3 を否定する．これから 1 の否定を導く．$\varphi(\bar{x})$ を 3 の否定を実現する論理式とする．

$$\Psi(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x}) : \psi \text{ は } \forall\text{-型}, T \models \varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})\}$$

を考えると，$\Psi'(\bar{x}) = \Psi(\bar{x}) \cup \{\neg\varphi(\bar{x})\}$ の解（$\bar{a}$ とする）を持つ $T$ のモデル $M$ が存在する．次に

$$T' = T \cup \mathrm{Diag}(M) \cup \{\varphi(\bar{a})\}$$

を考える．$\mathrm{Diag}(M)$ は $M$ で成り立つ量化記号を持たない $L(M)$-閉論理式の集合である．

**主張 A.** $T'$ はモデルを持つ.

そうでないとすれば，コンパクト性定理により，$\psi(\bar{a}, \bar{m}) \in \mathrm{Diag}(M)$ を適当にとれば，任意の $T$ のモデルで，$\forall\bar{x}\forall\bar{y}[\varphi(\bar{x}) \to \neg\psi(\bar{x}\bar{y})]$ が成立する．よって，$\forall\bar{y}[\neg\psi(\bar{x}, \bar{y})] \in \Psi(\bar{x})$ である．このことは，$\neg\psi(\bar{a}, \bar{m}) \in \mathrm{Diag}(M)$ を意味するので矛盾.（主張の証明終）

$N \models T'$ をとれば，$M \subset N$ であり，モデル完全性（条件 1）が成り立たないことがわかる.

□

**注意 129.** 上の条件 *3* は，勝手な論理式が $\forall$-型になることを求めている．しかし勝手な $\exists$-型が $\forall$-型になることだけで十分である.（論理式に出てくる $\exists$ を内側から順番に $\forall$ に変えてゆけばよい.）したがって，上の証明に使われていることを調べれば，条件 *1* より見た目上弱い形：

*4.* $M \subset N$ が $T$ の二つのモデルのとき,「任意の $\forall$-型の $L(M)$-閉論理式 $\varphi$ に対して，$M \models \varphi \iff N \models \varphi$」 $(M \prec_\forall N)$ となる

も同値になることがわかる．しかし，注意しなければならないのは,「$M \prec_\forall N \Rightarrow M \prec N$」が成り立つと言っている訳ではない.

**問 130.** $T$ のモデル完全性は次の条件と同値になることを示せ．*(*)* $M$ が $T$ のモデルのとき，$T \cup \mathrm{Diag}(M)$ は完全になる

**問 131.**
*1.* $T$ を稠密全順序（最大最小元なし）の公理とする．$T$ は量化記号消去を許す（従ってモデル完全になる）ことを示せ.

*2.* $M \prec_\forall N \iff M \prec_\exists N$ を示せ.

## 7.6 モデルコンパニオン

$L$ で書かれた理論 $T$ に対して，$T$ の帰結となる $\forall$-型の L-閉論理式全体を $T_\forall$ とかく．すなわち，$T$ のいかなるモデルでも成立する $\forall$-型の $L$-閉論理式全体である.

**補題 132.** $T$ と $S$ を $L$ の理論とする．このとき次は同値である.

*1.* $T_\forall = S_\forall$;

*2.* 任意の $M \models T$ は $S$ のモデルに拡大され（すなわち $N \models S$ となる $N \supset M$ が存在），任意の $M \models S$ は $T$ のモデルに拡大される．

*Proof.* $1 \Rightarrow 2$: 1を仮定する．対称性から，任意の $M \models T$ が $S$ のモデルに拡大されることを示せばよい．$S' = S \cup \mathrm{Diag}(M)$ を考えよう．これがモデルを持てばよい．そうでなければ，コンパクト性により，$\varphi(\bar{a}) \in \mathrm{Diag}(M)$ を適当にとることにより，$S \cup \{\varphi(\bar{a})\}$ がすでにモデルを持たない．よって，$S$ の勝手なモデルは $\forall x \neg\varphi(\bar{x})$ を満たす．よって，$\forall x \neg\varphi(\bar{x}) \in S_\forall$．$T_\forall \supset S_\forall$ により，$M \models \forall x \neg\varphi(\bar{x})$. 特に $M \models \neg\varphi(\bar{a})$ でなければならない．矛盾．

$2 \Rightarrow 1$: $\varphi$ を $\forall$-型として，$\varphi \notin T_\forall$ とする．よって，$M \models T \cup \{\neg\varphi\}$ となるモデルが存在する．2の仮定から $M$ の拡大となる $N \models S$ をとる．$\neg\varphi$ は $\exists$-型（と同値）なので，$N \models \neg\varphi$．よって，$\varphi \notin S_\forall$ である．対称性から1を得る． □

**定義 133.** $T$ と $S$ を $L$ の理論とする．$S$ が $T$ のモデルコンパニオン（model companion）であるとは，次の2条件が満たされることである：

1. $S$ はモデル完全であり，
2. $T_\forall = S_\forall$.

**事実 134.** $T$ に関する次の条件は同値である：

*1.* $\{M_i\}_{i<\omega}$ が $T$ のモデルの拡大列ならば，$\bigcup_{i<\omega} M_i \models T$.

*2.* $T$ と同等な $\forall\exists$-型の閉論理式だけからなる理論 $T_0$ が存在する．

*Proof.* $2 \Rightarrow 1$ は明らかである．$1 \Rightarrow 2$ を示す．$T$ からの帰結のうち $\forall\exists$-型のもの全体を $T_{\forall\exists}$ とかく．$M_0 \models T_{\forall\exists}$ を任意に選ぶ．目標は $M_0 \models T$ である．二つの列 $\{M_i\}_{i\in\omega}$, $\{N_i\}_{i\in\omega}$ を以下を満たすように選べることを帰納法で示す：

- $M_0 \prec_\forall N_0 \subset M_1 \prec_\forall N_1 \subset \cdots$
- $\{M_i\}_i$ は（$T_{\forall\exists}$ のモデルの）基本拡大列
- $\{N_i\}_i$ は $T$ のモデルの拡大列

$N_n$ の構成：

**主張 A.** $T \cup \mathrm{Diag}_\forall(M_n)$ がモデルを持つ．ただし $\mathrm{Diag}_\forall(M_n)$ は $M_n$ で成立する $\forall$-型の $L(M_n)$-閉論理式全体である．

そうでなければ，$T \models \neg\forall x\theta(x,m)$ となる $\forall x\theta(x,m) \in \mathrm{Diag}_\forall(M_n)$ がある．このとき，$\forall y(\neg\forall x\theta(x,y)) \in T_{\forall\exists}$ となる．$M_n \succ M_0 \models T_{\forall\exists}$ より，$M_n \models \forall y(\neg\forall x\theta(x,y))$ となる．よって $M_n \models \neg\forall x\theta(x,m)$．これは矛盾である.（主張 A 証明終わり）

$N_n$ を $T \cup \mathrm{Diag}_\forall(M_n)$ モデルとすれば，

$$M_n \prec_\forall N_n \models T$$

である．

$M_{n+1}$ の構成：

**主張 B.** $\mathrm{Th}(M_n,a)_{a\in M_n} \cup \mathrm{Diag}(N_n)$ はモデルを持つ．

そうでないとする．

$$\mathrm{Th}_{L(M_n)}(M_n) \models \neg\theta(a,b)$$

となる $\theta(a,b) \in \mathrm{Diag}(N_n)$ が存在する．ただし，$a \in M_n$, $b \in N_n \setminus M_n$ である．このとき，$\mathrm{Th}_{L(M_n)}(M_n) \models \forall y\neg\theta(a,y)$．すなわち $M_n \models \forall y\neg\theta(y)$．$M_n \prec_\forall N_n$ なので，$N_n \models \forall y\neg\theta(a,y)$．特に $N_n \models \neg\theta(a,b)$ を得る．これは矛盾である.（主張 B の証明終わり）

よって，$M^* = \bigcup M_i = \bigcup N_i$ は $M_0$ の基本拡大であり，同時に条件 1 により，$M^* \models T$ である．よって，特に $M_0 \models T$ である．以上から，勝手な $T_{\forall\exists}$ のモデルが $T$ のモデルになることがわかった． □

**注意 135.** モデル完全な理論はモデルの拡大列で閉じている．したがって $\forall\exists$-型の閉論理式の集合で書くことができる．

**定義 136.** $M \models T$ が $T$ の EC モデル（existentially closed model）であるとは次が成立することである：

(*) $\exists$-型の $L(M)$-論理式 $\exists\bar{y}\theta(\bar{x},\bar{y})$ が $M$ の拡大となる $N \models T$ に解を持てば，すでに $M$ の中に解が存在している（$N \models \exists\bar{y}\theta(\bar{x},\bar{y}) \Rightarrow M \models \exists\bar{y}\theta(\bar{x},\bar{y})$）．

**問 137.** 上の定義の (*) の部分を次のようにそれぞれ変えても同等の定義になることを示せ：

1. (*) の「$\exists$-型の $L(M)$-論理式」を「量化記号を持たない $L(M)$-論理式」に変える；

2. (*) 全体を「$M \subset N \models T \ \Rightarrow\ M \prec_{\exists} N$」に変える．

**注意 138.** $T$ が $\forall\exists$-型の $L$-閉論理式からなる理論のとき，勝手な $T$ のモデルは $T$ の $EC$ モデルに拡大される．これは，$\exists$-型論理式の解が存在しなければ，これらを順につけてゆき，$T$ のモデルの拡大列を作ることができるからである．極限のモデルは $\exists$-型論理式の解が常に存在し，なおかつ $T$ が $\forall\exists$-型のことを考えると, $T$ のモデルになっていることも分かる．

**定理 139.** $T = T_{\forall\exists}$ とする．このとき，$L$-理論 $S$ に関する次の 2 条件は同値である．

1. $S$ は $T$ のモデルコンパニオンである．
2. $M \models S \iff M$ は $T$ の $EC$ モデルである．

*Proof.* 最初に次の主張を示そう．

**主張 A.** $S$ が $T$ のモデルコンパニオンならば，$S \models T$ である．

勝手な $M \models S$ から始めて $T, S$ のモデルで交互に拡大する．すなわち，

$$M = M_0 \subset N_0 \subset M_1 \subset N_1 \subset \dots$$

ここで，$M_i \models S$, $N_i \models T$ である．$S$ のモデル完全性と $T = T_{\forall\exists}$ を考えると，極限のモデル $M^* = \bigcup M_i = \bigcup N_i$ は

$$M \prec M^* \models T$$

を満たす．よって $M \models T$ である.（主張の証明終わり）

<u>$1 \Rightarrow 2$</u>： $S$ が $T$ のモデルコンパニオンとして，2 を示す．

($\Rightarrow$) $M \models S$ とする．上の主張により，$M \models T$ である．$M$ の拡大 $N \models T$ において，

$$N \models \exists x \varphi(x)$$

とする．ここで $\varphi$ は $\exists$-型の $L(M)$ 論理式である．$N$ をさらに拡大して $M_1 \models S$ をとる．このとき，$\varphi(x)$ は $M_1$ にも解を持ち，$S$ のモデル完全性により，$M \prec M_1$ だから，$\varphi(x)$ は $M$ にも解を持つ．よって $M$ は $T$ の EC モデルである．

($\Leftarrow$) $M \models T$ を EC モデルとする．$M \models S$ を示す．

$$M \subset N \models S$$

となる $N$ をとる．$\forall x \exists y \theta(x; y) \in S$ を任意にとる．($\theta$ に量化記号なし．$S$ は $\forall\exists$-型でかかれていることに注意する．）いま $a \in M$ を任意にとると，$\theta(a, y)$ の解は $N \models S$ （$N \models T$ でもある）には存在する．$M$ が $T$ の EC モデルなので，$M$ の中にも解がある．よって，$M \models \forall x \exists y \theta(x, y)$ となる．

<u>$2 \Rightarrow 1$</u>：2 を仮定する．

<u>$T_\forall = S_\forall$</u>: $S \models T$ なので $T_\forall \subset S_\forall$ はよい．逆を示す．$M \models T$ が与えられたとき，$T$ が $\forall\exists$-型なので，$M$ を拡大して $T$ の EC モデル $N$ を得る．条件 2 により，$N \models S$ である．よって，$T_\forall = S_\forall$ は示された．

<u>$S$ のモデル完全性</u>: $M \subset N$ を $S$ の二つのモデルとする．ともに $T$ のモデルとなり，$M$ が $T$ の EC モデルだから，$\exists$-型の $L(M)$-閉論理式 $\varphi$ に対して $M \models \varphi \iff N \models \varphi$ である．したがって，注意 129 によって，$S$ がモデル完全になることが分かる． $\square$

モデルコンパニオンは存在すれば，それは EC モデルを規定する公理系になることがわかった．しかしモデルコンパニオンは常に存在するわけではない．

**例 140.** $L = \{R, F\}$ とする．ただし，$R$ は 2 変数述語記号，$F$ は 1 変数関数記号である．$T$ を次の論理式の集合とする．

1. $F$ は全単射で loop を持たない．
2. $R$ は対称的かつ非反射的（すなわちグラフの辺）である．
3. $\forall xy(F(x) = y \to \forall z(R(x, z) \leftrightarrow R(y, z)))$

この $T$ は $\forall$-論理式の集合なので，EC モデルを持つ．しかしモデルコンパニオンは持たない．これを示す．$S$ を $T$ のモデルコンパニオンとして，$M \models S$ を飽和モデルとする．$a, b \in M$ として，$F^m(a) \neq F^n(b)$ ($\forall m, n \in \omega$) なる元をとれば，

$$R(a, c) \wedge \neg R(b, c)$$

なる $c$ を持つ $T$ のモデルに拡大できるので，$M$ が EC モデルであることから，このような $c$ は $M$ の中にとれる．上の議論は，$S$ において，

$$\{F^m(x) \neq F^n(y) : m, n \in \omega\} \models \exists z(R(x, z) \wedge \neg R(y, z))$$

が成立することを意味する．よってコンパクト性から左辺から有限個をとって，

$$\{F^m(x) \neq F^n(y) : m, n < k\} \models \exists z(R(x,z) \wedge \neg R(y,z))$$

とできる．しかし，$a, b$ を同じ $F$-コンポーネントに属する十分離れた 2 点とすれば，$\forall z(R(a,z) \leftrightarrow R(b,z))$ でなければならない．これは矛盾である．