数理論理学 I

Mathematical Logic I

09 年　講義ノート

Contents

1 基礎知識

1.1 順序数

定義 1 順序集合 $X = (X, <)$ が整列 (well-ordered) であるとは，任意の空でない $A \subset X$ が最小元を持つことである．

注意 2

1. 整列順序集合 X は全順序集合である．
2. 順序集合 X が整列なることは次の条件 (a)+(b) と同値：
   (a) X が全順序集合である．
   (b) X は無限下降列を持たない．
3. X が整列集合のとき，真なる始切片は $I(a) = \{x \in X : x < a\}$ なる形をしている．
4. 整列順序集合はその真なる始切片と同型にならない．
5. 同型でない２つの整列順序集合は，片方が片方の（真の）始切片と同型になる．

定義 3 整列順序の順序型を順序数 (ordinal) という．自然数 n は n 個のものが一列に並んだ順序集合の順序型と考えて，それ自体が順序数となる．自然数の集合 $\mathbb{N}$ の順序型を ω であらわす.

α, β を二つの異なる順序数とする．上の注意により，α が β の真の始切片になる（このとき $\alpha < \beta$ とかく）または β が α の真の始切片になる（$\beta < \alpha$ とかく）．よって任意の二つの順序数の間に大小が確定する．α より小さな順序数 β は α の始切片となり，注意 2 により $I(b)$ の形をしている．β に対してこの $b \in \alpha$ を対応させる写像は順序同型になる．よって順序数 α は α より小さな順序数全体の作る順序集合の順序型に一致する．このことから，

$$\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$$

と見ることができる.

定義 4 （順序集合の和）$X = (X, <_X)$ と $Y = (Y, <_Y)$ を $X \cap Y = \emptyset$ なる二つの全順序集合とする．このとき，X の後ろに Y を置いてできる全順序集合を $X + Y$ で表す．より正確に言うと次のようになる.

1. $X + Y$ は集合として $X \cup Y$ である.
2. $X + Y$ において $x < y$ が成立するのは,「$x <_X y$ $(x, y \in X)$」,「$x <_Y y$ $(x, y \in Y)$」,「$x \in X, y \in Y$」のいずれかが成立するとき.

注意 5

1. 整列順序集合と整列順序集合の和は再び整列順序集合となる．このことから順序数と順序数の和が定義される.
2. $1 + \omega$ は 1 個の点の後ろに自然数のなす順序集合を並べた順序の順序型．よってそれは順序型としては ω になる．$1 + \omega = \omega$.
3. $\omega + 1$ は自然数の後に 1 点（無限遠点）を付け足した順序の順序型．これは ω と異なる.
4. 順序数の和は非可換であるが，結合律は成立する.

定義 6 順序数 α が $\alpha = \beta + 1$ とかけるとき，後継順序数 (succesor ordinal) という．$\alpha = \beta + 1$ とかけないとき，極限順序数 (limit ordinal) という.

注意 7

1. 自然数 $n > 0$ は順序数として後継順序数である.
2. ω は極限順序数である．α が順序数のとき，極限順序数 β と自然数 n が存在して，$\alpha = \beta + n$ とかける（また書き表し方は一意的である）.

1.2　濃度と基数

A を集合とする．このとき整列可能性定理により，適当な順序 $<$ を A 上に定義することにより，$A=(A,<)$ を整列順序集合とできる．このことを別の角度で見ると，ある順序数 α によって

$$A=\{a_i : i<\alpha\}$$

と番号付けられることを意味している．$A=\{a_i : i<\alpha\}$ とできる順序数 α の中で最小のものが存在する．これを A の濃度といい $|A|$ で表す．ある集合の濃度となる順序数（$|A|$ の形の順序数）を基数という．基数は集合の大きさを測る指標となる．基数は κ, λ などで表す．

定義 8 κ と λ を基数とする．A, B を $\kappa=|A|$, $\lambda=|B|$, $A\cap B=\emptyset$ なる集合とする．このとき，

1. $\kappa+\lambda=|A\cup B|$,
2. $\kappa\cdot\lambda=|A\times B|$

で基数の和と積を定義する．

注意 9
1. 上の定義は A, B の取り方に依存しない．
2. 有限の順序数（自然数）は基数であり，これらの間の和と積は自然数の和と積に一致する．
3. 順序数の和と基数の和は異なる．例えば基数の和として，$1+\omega=\omega+1=\omega$ である．
4. κ, λ のいずれか一方が無限のとき，$\kappa+\lambda=\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$.

1.3　超限帰納法と Zorn の補題

通常の帰納法では,「任意の自然数に対して性質 P が成立する」を示す場合に次を示す．

(*) n 未満のすべての m について $P(m)$ を仮定して，$P(n)$ も成立する．

このことは自然数でなくても，順序数でも成立する．順序数の場合の帰納法を特に超限帰納法という．

例 10 (超限帰納法による証明) 任意の順序数 α が極限順序数 β と自然数 n の和でかけることを超限帰納法で示す．α より真に小さい順序数で，この命題が成立していると仮定する．α が極限順序数のときは明らかに正しい（$\alpha = \alpha + 0$）．α が後継順序数のとき，$\alpha = \alpha_0 + 1$ とかける．$\alpha_0 < \alpha$ なので，α_0 に帰納法の仮定を使うと，極限順序数 β と自然数 n_0 を用いて，

$$\alpha_0 = \beta + n_0$$

とかける．このことから，$\alpha = \alpha_0 + 1 = (\beta + n_0) + 1 = \beta + (n_0 + 1)$ となり，極限順序数 β と自然数 $n_0 + 1$ の和として表現できた．以上から超限帰納法によりすべての順序数が極限順序数と自然数の和でかけることがわかる．

Zorn の補題は一言で言えば，順序集合がある条件を満たせば極大元を持つという主張である．多くの場合次の形で十分である：

(**) A を集合として，$\emptyset \neq X \subset \mathcal{P}(A)$ とする．$B_i \in X$ $(i < \alpha)$ が包含関係に関する上昇列のとき，必ず

$$\bigcup_{i<\alpha} B_i \in X$$

となるとする．このとき，X に極大元（包含関係に関して）が存在する．

例 11 R を 1 を持つ環とする．R に極大イデアルが存在することを *Zorn* の補題で示す.

$$X = \{I \subset R : I \text{ は } 1 \text{ を含まないイデアル}\}$$

とする．X は上昇列の和で閉じている．よって極大元を持つ．それが極大イデアルである．

2 言語，論理式，構造

2.1 言語

数学で使う記号のうち，定数記号，関数記号，述語記号に注目する．これらからなる一つの集合を固定して，それを言語とよぶ.

例 12 1. 群の言語とは集合 $\{e, * \cdot *, *^{-1}\}$ のことである．ここで，e は単位元を表現するための定数記号，$* \cdot *$ は群の演算を表現するための 2 変数の関数記号，$*^{-1}$ は逆元を対応させる操作に対応する関数記号である．($*$ はそこに何かが代入できることを意味しようとしている．)

2. 体の言語とは集合 $\{0, 1, * + *, -*, * \cdot *, *^{-1}\}$ のことである．

3. 順序体の言語とは集合 $\{0, 1, * + *, -*, * \cdot *, *^{-1}, * < *\}$ のことである．

上の例では，各記号はそれぞれ（ある程度）固有の意味を持っていた．たとえば，体の言語における 0 はもちろん加法に対する単位元をあらわすものだという暗黙の了解がある．

しかし，われわれが今後展開する議論においては，記号は単なる記号であり，それらに固有の意味はない．ただし，それぞれの記号は定数記号か，関数記号か，述語記号なのかは指定されている．また関数記号，述語記号の場合は何変数かも指定されている．言語は L,L',... などであらわす．

次に変数記号の集合を一つ固定しておく．これらは，x,y,z,x_0,x_1,... などである．

定義 13 (項) L を言語とする．L の項は次のように帰納的に定義される．

0. 変数記号と L に属する定数記号はすべて L の項である．

1. $t_1, ..., t_n$ がすべて L の項で，$F \in L$ が n 変数の関数記号ならば，$F(t_1, ..., t_n)$ は L の項である．

2. 以上によって項とわかるものだけが L の項である．

通常上のような帰納的な定義においては，条件 3 は省略される．

例 14 $L = \{c, F\}$ とする．ただし，c は定数記号，F は 2 変数関数記号である．このとき，

$$x, c, F(x, c), F(x, F(x, c)), F(F(x, c), F(x, c)), ...$$

などは L の項の例である．

定義 13 は次のように言ってもよい：

1. $T_0 = \{$ 変数記号 $\} \cup \{L$ の定数記号 $\}$;

2. $T_{k+1} = \{F(t_1, ..., t_n) : t_1, ..., t_n \in T_k$，$F \in L$ は n 変数関数記号 $\}$;

3. L の項の集合 $= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$.

問 15 G を群とする．$A \subset G$ によって生成される G の部分群 $\langle A \rangle$ を帰納的に定義せよ．

以上で変数記号の集合と言語（これも記号の集合）から項の集合という記号の有限列の集合が定義された．次に項を使って「命題」を意味する記号列である論理式を定義したい．そのために新たに論理記号の集合 $\{=, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \forall, \exists\}$ を導入する．

定義 16 (原子論理式)

1. t と s が L の項のとき，記号列 $t = s$ は L の原子論理式である．

2. $t_1, ..., t_n$ がすべて L の項で，$P \in L$ が n 変数の述語記号ならば，$P(t_1, ..., t_n)$ は L の原子論理式である．

例 17 $L = \{c, F, * < *\}$ とする．ただし，c は定数記号，F は 2 変数関数記号，$* < *$ は 2 変数述語記号である．このとき，

1. $F(x, c) = y$,

2. $F(x, y) < F(F(x, y), c)$

などは原子論理式の例である．

L の項 t の中に現れる変数記号が $x_1, ..., x_n$ に含まれるとき，t を $t(x_1, ..., x_n)$ とかくことがある．

次に論理式の定義を与えるが，このために論理記号とよばれる記号 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$ を用意する．

定義 18 (論理式) L を言語とする．L の論理式（L-論理式）は次のように帰納的に定義される．

0. L の原子論理式は L の論理式である．

1. φ, ψ が L の論理式で x が変数ならば，

$$\neg(\varphi),\ (\varphi) \wedge (\psi),\ (\varphi) \vee (\psi),\ (\varphi) \to (\psi),\ \forall x(\varphi), \exists x(\varphi)$$

はすべて L の論理式である．

L-論理式 φ の中に，変数 x があらわれていて，なおかつこの x に作用しているような $\forall x$ または $\exists x$ があるとき，この x を束縛（された）変数という．束縛されていない変数は自由変数とよぶ．たとえば φ が $(\forall x(F(x, y) = x)) \wedge (F(x, x) = z)$ のとき，$\wedge$ の前に出てくる x は $\forall x$ で束縛された変数だが，後半の x は自由変数である．φ の中の自由変数がすべて $x_1, ..., x_n$ に含まれるとき，φ のことを $\varphi(x_1, .., x_n)$ とかくことがある．また，このとき $varphi$ は n 変数論理式とよばれる．

定義 19 （閉論理式）論理式 φ の中に自由変数がないとき，φ を閉論理式とよぶ.

2.2 構造

論理式はあくまでも記号の列であり，固有の意味は持たない．意味を与えるのは構造である．

以下で α,β... などは順序数を表す.

定義 20 （構造）$L = \{c_i : i < \alpha\} \cup \{F_i : i < \beta\} \cup \{P_i : i < \gamma\}$ を言語とする．ただし，c_i は定数記号，F_i は m_i 変数の関数記号，P_i は n_i 変数述語記号とする．次の条件を満たす対

$$(M; \{c_i^M\}_{i<\alpha}, \{F_i^M\}_{i<\beta}, \{P_i^M\}_{i<\gamma})$$

を一つの L-構造とよぶ：

1. $M \neq \emptyset$
2. $c_i^M \in M\ (i < \alpha)$
3. F_i^M は M^{m_i} から M への関数 $(i < \beta)$
4. $P_i^M \subset M^{n_i}\ (i < \gamma)$

c_i^M を定数記号 c_i の M における解釈とよぶ．同様に F_i^M は関数記号 F_i の解釈，P_i^M を述語記号 P_i の解釈とよぶ．M を上の構造のユニバース（領域）とよぶ.

注意 21 *1.* 定数記号は名前の示すとおり定数（特定の元）を表すための記号であるから，構造では実際特定の元に解釈されている．同様に関数記号は関数をあらわすための記号であり，構造ではまさに関数に解釈されているわけである．述語記号の場合は，少し注意を要する．述語記号の解釈は述語記号を成り立たせたい元全体として解釈されているわけである．たとえば実数の世界において $<$ の「通常の」解釈は $\{(x, y) \in \mathbb{R} : x < y\}$ になっている.

2. 言語の解釈を明示する必要がないとき（あるいは面倒なとき）ユニバース M だけを示して，構造とよぶ．しかし我々の立場で構造という場合は言語の解釈の部分も本来は明示すべきである．たとえば，実数の集合 $\mathbb{R}$ を考えるとき，構造 $(\mathbb{R}, 0., 1, +, \cdot)$ と $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ とはまったく異なるものとして扱う．前者は体としての実数構造であり，後者は順序体としの実数構造である.

3. $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ を言語として，$\mathbb{R}$ を L-構造にする方法は１つでない．０は実数の０と解釈して，１は１に解釈，$+$ は和を与える関数，$\cdot$ は積を与える関数に解釈するのが普通ではあるが，たとえば，０を実数の１と解釈しても我々の意味では L-構造になる.

次はまったく常識的な定義である．L の項 t は帰納的に構成されていた．したがって，項 t の M においての値も t がいかに構成されたかに従って帰納的に定義される：

定義 22 (項の解釈) M を L-構造とする．L の項 $t(x_1, ..., x_n)$ と $a_1, ..., a_n \in M$ に対して,「t に $a_1, ..., a_n$ を代入した値」（$t^M(a_1, ..., a_n)$）を帰納的に左辺を右辺で定義する:

0. (a) t が変数 x_i のときのとき,

$$t^M(a_1, ..., a_n) = a_i.$$

   (b) t が定数記号 c のとき,

$$t^M(a_1, ..., a_n) = c^M.$$

1. t が $F(t_1(x_1,...,x_n),...,t_m(x_1,...,x_n))$（$F$ は関数記号，t_i たちは項）のとき，

$$t^M(a_1,...,a_n) = F^M(t_1^M(a_1,...,a_n),...,t_m^M(a_1,...,a_n)).$$

定義 23 （論理式の解釈）M を L-構造，$a_1,...,a_n \in M$ とし，$\varphi = \varphi(x_1,...,x_n)$ を L-論理式とする．「M で $\varphi(a_1,...,a_n)$ が成立する」（$M \models \varphi(a_1,...,a_n)$）という関係を帰納的に定義する．

1.
   - φ が原始論理式 $t(x_1,...,x_n) = u(x_1,...,x_n)))$ のときは，
   $$M \models \varphi(a_1,...,a_n) \iff t^M(a_1,...,a_n) = u^M(a_1,...,a_n).$$
   - φ が原始論理式 $P(t_1(x_1,...,x_n),...,t_m(x_1,...,x_n))$ のときは，
   $$M \models \varphi(a_1,...,a_n) \iff (t_1^M(a_1,...,a_n),...,t_m^M(a_1,...,a_n)) \in P^M.$$
2.
   - φ が $\varphi_1(x_1,...,x_n) \wedge \varphi_2(x_1,...,x_n)$ のとき，
   $$M \models \varphi(a_1,...,a_n) \iff \text{“}M \models \varphi_1(a_1,...,a_n)\,\text{かつ}\,M \models \varphi_2(a_1,...,a_n)''.$$
   - φ が $\varphi_1(x_1,...,x_n) \vee \varphi_2(x_1,...,x_n)$ のとき，
   $$M \models \varphi(a_1,...,a_n) \iff \text{“}M \models \varphi_1(a_1,...,a_n)\,\text{または}\,M \models \varphi_2(a_1,...,a_n)''.$$
   - φ が $\varphi_1(x_1,...,x_n) \to \varphi_2(x_1,...,x_n)$ のとき，
   $$M \models \varphi(a_1,...,a_n) \iff \text{“}M \models \varphi_1(a_1,...,a_n)\,\text{ならば}\,M \models \varphi_2(a_1,...,a_n)''.$$
   - φ が $\neg\psi(x_1,...,x_n)$ のとき，
   $$M \models \varphi(a_1,...,a_n) \iff \text{“}M \models \varphi(a_1,...,a_n)\,\text{でない}''.$$
   - φ が $\exists x \psi(x,x_1,...,x_n)$ のとき，
   $$M \models \varphi(a_1,...,a_n) \iff \text{“適当な}\,b \in M\,\text{に対し}\,M \models \psi(b,a_1,...,a_n)''.$$
   - φ が $\forall x \psi(x,x_1,...,x_n)$ のとき，
   $$M \models \varphi(a_1,...,a_n) \iff \text{“任意の}\,b \in M\,\text{に対し}\,M \models \psi(b,a_1,...,a_n)''.$$

構造を保存する写像を同型写像とよぶ．正確には次のようになる．

定義 24 (同型) L を定義 20 における言語 L とする．M と N を L-構造とする．全単射 $\sigma : M \to N$ が同型写像であるとは次の条件を満たすことである．

1. $\sigma(c_i^M) = c_i^N \ (i < \alpha)$;
2. $\sigma \circ F_i^M = F_i^N \circ \underbrace{(\sigma, ..., \sigma)}_{n_i} \ (i < \beta)$;
3. $\sigma(P_i^M) = P_i^N \ (i < \gamma)$.

条件２，３は次のように言い換えることができる．

2'. $F_i^M(a_1, ..., a_{m_i}) = b \iff F_i^N(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_{n_i})) = \sigma(b)$, $(\forall a_1, ..., a_{m_i}, b \in M)$;

3'. $(a_1, ..., a_{n_i}) \in P_i^M \iff (\sigma(a_1), ..., \sigma(a_{n_i})) \in P_i^N \ (\forall a_1, ..., a_{n_i} \in M)$.

問 25 $\sigma : M \to N$ を同型写像とする．このとき，すべての項 $t(x_1, ..., x_n)$ に対して，

$$\sigma(t^M(a_1, ..., a_n)) = t^N(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_n)) \quad (\forall a_1, ..., a_n \in M)$$

が成立することを t の構成に関する帰納法で示せ．

問 26 L-構造の間の全単射 $\sigma : M \to N$ に対して次が同値になることを示せ．.

1. $\sigma : M \to N$ は同型写像*;*

2. すべての原始論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ とすべての $a_1, ..., a_n \in M$ に対して，

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff N \models \varphi(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_n)).$$

定義 27 (基本写像) M,N を L-構造，$A \subset M$, $B \subset N$ とする．写像 $\sigma : A \to B$ は条件

(*) すべての L-論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ とすべての $a_1, ..., a_n \in A$ に対して，

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff N \models \varphi(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_n)).$$

を満たすとき，基本写像とよばれる．

問 28 同型写像は基本写像になることを示せ.（ヒント：上の定義 *27*の *(*)* の部分を論理式 φ の構成に関する帰納法で示せばよい.）

3　ウルトラプロダクトとコンパクト性

3.1　ウルトラフィルター

定義 29 (ウルトラフィルター) 無限集合 I とその部分集合全体 $\mathcal{P}(I)$ を考える．$U \subset \mathcal{P}(I)$ とする．

1. U は有限交叉性を持つ $\iff$ U の勝手な有限部分集合 $F \subset U$ は共通部分を持つ（すなわち，$\forall \underbrace{A_1, ..., A_n}_{finite} \in U$ に対して，$A_1 \cap ... \cap A_n \neq \emptyset$）．

2. U が I 上のウルトラフィルター $\iff$ U は有限交叉性を持つ $\mathcal{P}(I)$ の部分集合の中で極大である（すなわち，U 自体は有限交叉性を持ち,U の真の拡大はもはや有限交叉性を持たない）．

例 30　*1.* I を無限集合とする．$A \subset I$ が補有限（*cofinite*）であるとは，A の補集合 $A^c = I \setminus A$ が有限となることである．$F = \{A \subset I :$ A は補有限 $\}$ とすれば，F は有限交叉性を持つ．

2. I を非可算集合とする．$F = \{A \subset I : A^c$ は高々可算 $\}$ とすれば，F は有限交叉性を持つ．

問 31 I 上のウルトラフィルター U に対して次を示せ：

1. $A \in U,\ A \subset B \subset I \ \Rightarrow\ B \in U;$

2. $A \in U,\ B \in U \quad \iff \quad A \cap B \in U.$

問 32 $a \in I$ とするとき，$U_a = \{A \subset I : a \in A\}$ は I 上のウルトラフィルターになることを示せ.（ヒント：U_a のすべての元は a を持つのでそれらの共通部分は空でない．$\{a\} \in U_a$ に注意する．U_a を真に拡大する集合には a を含まない集合 B がある．このとき，$\{a\} \cap B = \emptyset$ である.）

注意 33 $U \subset \mathcal{P}(I)$ が有限交叉性を持つとき，次は同値である．

1. U はウルトラフィルターである．

2. 勝手な $A \subset I$ に対して，$A \in U$ または $A^c \in U.$

次の二つの補題はともに易しいが重要である．

補題 34 $U_i \subset \mathcal{P}(I)$ $(i < \alpha)$ を有限交叉性を持つ集合の上昇列とする．このとき，$U^* = \bigcup_{i<\alpha} U_i$ も有限交叉性を持つ．

Proof: 有限個の $A_i, ..., A_n \in U^*$ を任意にとる．このとき，これらをすべて含む U_i が存在する．U_i は有限交叉性を持つので，$A_1 \cap ... \cap A_n$ は空でない． ∎

補題 35 $U \subset \mathcal{P}(I)$ が有限交叉性を持つとする．このとき，任意の $A \subset I$ に対して，

$$U \cup \{A\} \text{ または } U \cup \{A^c\}$$

の少なくとも一方は有限交叉性を持つ．

Proof: 両方とも有限交叉性を持たないとすれば，有限集合 $F_1 \subset U$ と $F_2 \subset U$ で，$\bigcap F_1 \cap \{A\} = \emptyset$, $\bigcap F_2 \cap \{A^c\} = \emptyset$ となるものが存在する．したがって，$F = F_1 \cup F_2$ とすれば，$\bigcap F = \emptyset$ となる．これは矛盾． ∎

例 32 で存在を示したのは，中心のあるウルトラフィルターである．中心のないウルトラフィルターも存在する．

定理 36 （ウルトラフィルターの存在）I を無限集合として，$F \subset \mathcal{P}(I)$ は有限交叉性を持つとする．このとき，F を拡大して I 上のウルトラフィルターにすることができる．($\exists U \supset F$ *s.t.* U は I 上のウルトラフィルター.)

Proof: $\mathcal{P}(I)$ の濃度を κ として，$\mathcal{P}(I)$ の元を一列にならべた列 $\{A_i : i < \kappa\}$ を作っておく．以下のように $i \leq \kappa$ に関する帰納法で，上昇列 $U_i \subset \mathcal{P}(\mathcal{I})$ を作る：

1. $U_0 = F$;
2. $i = \alpha + 1$ のとき，$U_i \subset \mathcal{P}(I)$ は
   - $U_\alpha \subset U_i$;
   - A_α または A_α^c のいずれかは U_i に属する．

   を満たす有限交叉性を持つ集合とする．(補題から存在がわかる)
3. i が極限順序数のとき $U_i = \bigcup_{j<i} U_j$.

このとき，補題から $U = U_\kappa$ は有限交叉性を持つことはすぐわかる．次に勝手な $A \subset I$ が与えられたとき，$A \in U$ または $A^c \in U$ を示せばよい．$A = A_\alpha$ となる α を選ぶ．構成法から $A \in U_{\alpha+1}$ または $A^c \in U_{\alpha+1}$ である．$U_{\alpha+1} \subset U$ だから証明された． ▮

注意 37 中心のない $\mathbb{N}$ 上のウルトラフィルターは次のように作ればよい.$F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を補有限集合全体とする．これは有限交叉性を持ち，$\bigcap F = \emptyset$ である．F はウルトラフィルターに拡大される．

3.2 ウルトラプロダクト

この節では，言語 L は関数記号だけからなる場合を考える．この仮定は表現を簡潔にするためだけのもので，一般の場合もまったく同様の議論ができる．

$I \neq \emptyset$ を集合とする．各 $i \in I$ に対して，M_i を L-構造とする．ユニバースの直積 $N = \Pi_{i \in I} M_i$ を考えよう．N の元は $(a_i)_{i \in I}$ の形をしている．関数記号 $F \in L$ の解釈を成分ごとの計算に帰着することにより L-構造となる．もう少し正確に述べれば，次のように定めることで L-構造となる：

$$F^N(a^1, ..., a^n) \;=\; \left(F^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n)\right)_{i \in I}$$

ただし，$a^j = (a_i^j)_{i \in I} \in N\ (j = 1, ..., n)$ である．(j 乗というわけではないので注意.)

上の定義は，群や環の直積の定義を模したものになっている．しかし，次のことに注目してほしい．

問 38 $|I| \geq 2$ として，$F_i\ (i \in I)$ たちを体とする．このとき，F_i たちの直積は体にはならないことを示せ．

そこで，構造に対する条件（群だったり体だったりという条件）を保存する拡大を考えたい．そのために必要となるのが，直積集合をウルトラフィルターによる同値関係で割るという操作である．

以下では，しばらく次の仮定をおく．

- I を無限集合として，
- U をその上のウルトラフィルターとする．
- 各 $i \in I$ に対して，L-構造 M_i が与えられている．

- N をこれらの構造の直積とする．
- $a \in N$, $i \in I$ に対して，a_i はその i 番目の座標とする．すなわち $a = (a_i)_{i \in I}$ である．

問 39 直積集合 N 上の 2 項関係 $\sim$ を

$$a \sim b \iff \{i \in I : a_i = b_i\} \in U$$

で定義する．このとき，$\sim$ は同値関係になることを示せ．

N を同値関係で割った集合を $M^* = \prod_{i \in I} M_i/U$ であらわすことにする．$a \in N$ の同値類を $[a]$ であらわすことにすると，$M^* = \{[a] : a \in N\}$, $[a] = [(a_i)_{i \in I}$ である．

定義 40 （ウルトラプロダクト）$M^* = \prod_{i \in I} M_i/U$ は各関数記号 $F \in L$ の解釈を次のように定めることで L-構造になる．

$$F^{M^*}([a^1], ..., [a^n]) = [F^N(a^1, ..., a^n)].$$

L-構造としての M^* を M_i たちのウルトラプロダクトという．

注意 41 上の定義が *well-defined* なことは調べておく必要がある．すなわち，$a^1 \sim b^1$, ..., $a^n \sim b^n$ のとき，

$$F^N(a^1, ..., a^n) \sim F^N(b^1, ..., b^n)$$

を示す必要がある．しかし，これは「$A, B \in U$ のとき $A \cap B \in U$」を使えば簡単である．

補題 42 $t(x^1, ..., x^n)$ を L の項とする．$[a^1], ..., [a^n], [b] \in M^*$ に対して，

$$t^{M^*}([a^1], ..., [a^n]) = [b] \iff \{i \in I : t^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i\} \in U.$$

Proof: t が変数記号 x のときは自明．t が L の関数記号 F のとき，

$$\begin{aligned} F^{M^*}([a^1], ..., [a^n]) = [b] &\iff [F^N(a^1, ..., a^n)] = [b] \\ &\iff [\left(F^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n)\right)_i] = [(b_i)_i] \\ &\iff \{i \in I : F^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i\} \in U. \end{aligned}$$

後は t の構成に関する帰納法で示せばよい. 最も単純な場合を示しておく：$t = F(u)$ で F は１変数関数記号，u は１変数の項とする．$[a] \in M^*$ に対して，$u^{M^*}([a]) = [d]$ とすれば，帰納法の仮定から，$\{i \in I : u^{M_i}(a_i) = d_i\} \in U$ となる．したがって，

$$\begin{aligned} F^{M^*}(u^{M^*}([a])) = [b] &\Rightarrow F^{M^*}([d]) = [b] \\ &\Rightarrow \{i \in I : F^{M_i}(d_i) = b_i\} \in U \ \& \ \{i \in I : u^{M_i}(a_i) = d_i\} \in U \\ &\Rightarrow \{i \in I : F^{M_i}(d_i) = b_i \ \& \ u^{M_i}(a_i) = d_i\} \in U \\ &\Rightarrow \{i \in I : F^{M_i}(u^{M_i}(a_i)) = b_i\} \in U. \end{aligned}$$

逆も同様である. ∎

定理 43 （ウルトラプロダクトの基本定理）$\varphi(x^1, ..., x^n)$ を L-論理式とする．任意の $[a^1], ..., [a^m] \in M^*$ に対して次が成立する：

$$M^* \models \varphi([a^1], ..., [a^n]) \iff \{i \in I : M_i \models \varphi(a_i^1, ..., a_i^n)\} \in U.$$

Proof: 0) φ が原子論理式のときは補題から明らか．後は φ の構成に関する帰納法で示せばよい.
1) φ が $\neg\psi$ のとき：

$$\begin{aligned} M^* \models \neg\psi([a^1], ..., [a^n]) &\iff M^* \models \psi([a^1], ..., [a^n]) \text{ でない} \\ &\iff \{i \in I : M_i \models \psi(a_i^1, ..., a_i^n)\} \notin U \\ &\iff \{i \in I : M_i \models \psi(a_i^1, ..., a_i^n)\}^c \in U \\ &\iff \{i \in I : M_i \models \psi(a_i^1, ..., a_i^n) \text{ でない }\} \in U \\ &\iff \{i \in I : M_i \models \neg\psi(a_i^1, ..., a_i^n)\} \in U. \end{aligned}$$

2)φ が $\exists y \psi(x^1, ..., x^n, y)$ のとき：

$$\begin{aligned} M^* \models \exists y \psi([a^1], ..., [a^n], y) &\iff M^* \models \psi([a^1], ..., [a^n], [b]) \text{ for some } b \in M^* \\ &\iff \{i \in I : M_i \models \psi(a_i^1, ..., a_i^n, b_i)\} \in U \text{ for some } b_i\text{'s} \\ &\iff \{i \in I : M_i \models \exists y \psi(a_i^1, ..., a_i^n, y)\} \in U \end{aligned}$$

3) その他の論理記号の場合も同様である. ∎

系 44 φ を L-閉論理式とする．このとき，

$$M^* \models \varphi \iff \{\imath \in I : M_i \models \varphi\} \in U$$

上の系で主張していることを一言でいうと次のようになる：論理式 φ がウルトラプロダクトで成立するのは，(U の意味で）ほとんどの M_i たちが φ を成立させるときである．

例 45 F_i（$i \in I$）が体のとき，$R = \prod_{i \in I} F_i$ は 1 を持つ環になる．$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする．$a \in R$ に対して，$Z_a = \{i \in I : a_i = 0\}$ とおく．$U = \{Z_a \subset I : a \in \mathfrak{m}\}$ とすれば，U は I 上のウルトラフィルターになる：最初に $A \in U,\ A \subset B$ ならば $B \in U$ が成り立つことに注意しておく．(有限交叉性）$Z_{a^1}, ..., Z_{a^n} \in U$ とする．各 $a^i \in \mathfrak{m}$ に適当に R の元をかけておけば，$a^i : I \to \{0, 1\}$ と仮定できる．もし，

$$Z_{a^1} \cap \cdots \cap Z_{a^n} = \emptyset$$

が成り立てば，関数 a^i たちの共通零点がない．よって関数 $1 - a^i$ たちが共通に 1 となる点がない．このことから $\prod_{i \leq n}(1 - a^i) = 0$ を得る．展開して整理すれば，1 が $a^i \in \mathfrak{m}$ たちの積と和で表現されていることがわかる．これは $\mathfrak{m}$ が極大イデアルであることに矛盾する．(完全性）$A \subset I$ に対して，$i \in A$ のとき値 0 をとり $i \notin A$ のとき，値 1 をとる $a_A \in R$ をとる．$a_A \in \mathfrak{m}$ ならば，$A = Z_{a_A} \in U$ である．$a_A \notin \mathfrak{m}$ のときは，$\mathfrak{m}$ の極大性により，

$$1 = a' a_A + b$$

となる $a' \in R$ と $b \in \mathfrak{m}$ がある．したがって，$Z_b \subset (Z_{a' a_A})^c$．しかし，$A \subset Z_{a' a_A}$ なので，$Z_b \subset A^c$．よって，$A^c \in U$ である．

3.3 コンパクト性定理

ウルトラプロダクトの基本定理は非常に重要な定理である．この定理の帰結として，コンパクト性定理がある．

言葉の使い方：T を L-閉論理式の集合とする．L-構造 M が T のすべての論理式を満たすとき，M は T のモデルであるといい，$M \models T$ とかく．すなわち，$M \models T \iff M \models \varphi\ (\forall \varphi \in T)$.

定理 46 （コンパクト性定理）T を L-閉論理式からなる一つの集合とする．このとき，次は同値である．

1. T はモデルを持つ（$\exists M\ s.t.\ M \models T$）；

2. T の各有限部分はモデルを持つ（$\forall S \subset_{\text{fin}} T\ \exists M_S\ s.t.\ M_S \models S$）．

Proof: $1 \Rightarrow 2$ は明らかである．$2 \Rightarrow 1$ を示す．T の有限部分集合全体を I とおく．各 $S \in T$ に対して，$M_S \models S$ となる L-構造を一つずつ選んでおく．$\varphi \in T$ に対して，

$$A_\varphi = \{S \in I : M_S \models \varphi\}$$

と定義する．A_S は空でない I の部分集合である．A_S たち全体を F とおく．

Claim 1 $F \subset \mathcal{P}(I)$ は有限交叉性を持つ．

$A_{\varphi_1}, ..., A_{\varphi_n} \in F$ とする．このとき，$M_{\{\varphi_1,...,\varphi_n\}}$ は各 φ_i のモデルになっているから，

$$\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \in A_{\varphi_1} \cap ... \cap A_{\varphi_n}$$

したがって，$A_{\varphi_1} \cap ... \cap A_{\varphi_n} \neq \emptyset$.（主張 1 の証明終わり）

したがって，F を拡大して I 上のウルトラフィルター U を作ることができる．$M = \prod_{S \in I} M_S/U$ とおく．

Claim 2 $M \models T$.

各 $\varphi \in T$ に対して，$M \models \varphi$ を示せばよい．そのためには，ウルトラフィルターの基本定理により，$\{S \in I : M_S \models \varphi\} \in U$ を示せばよい．しかし，これは $A_\varphi \in U$ から明らかである．∎

例 47（自然数の超準モデルの存在）自然数の集合 $\mathbb{N}$ を $\{0, 1, +, \cdot, <\}$-構造と考える．c を新しい定数記号として，$T = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n : n \in \mathbb{N}\}$ を考える．($c > n$ はこの言語では，$c > \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}$ とかかれている.）T の有限部分集合 T_0 が与えられたとき，T_0 のモデルが存在することを示す．T_0 は次の形（の部分集合）と思ってよい．

$$\{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n_1, \dots, c > n_k\}$$

c の解釈を $n = \max\{n_1, ..., n_k\} + 1$ とすれば，$\mathbb{N}$ は T_0 のモデルになる．コンパクト性定理により，T 全体のモデル $\mathbb{N}^*$ が存在する．$\mathbb{N}^*$ をもともとの言語 $\{0, 1, +, \cdot, <\}$ に制限して考えよう．作り方から，$\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^*$ は論理式で区別できない．しかし，$\mathbb{N}^*$ には c の解釈をとることができるので，$\mathbb{N}$ と同型ではない．

例 48 （濃度の表現不可能性）L-構造 M が 3 個の以上の元を持つということは，論理式 $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [x_1 \neq x_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_3]$ で表現される．同様に有限の n が与えられたとき，L-構造が n 個以上の元を持つということを表現する L-閉論理式 φ_n がある．このとき，

$$M \models \varphi_n \wedge \neg \varphi_{n+1} \iff M \text{ の濃度は } n$$

が成立する．しかし，

$$M \models \varphi^* \iff M \text{ は有限}$$

を成り立たせる L-閉論理式 φ^* は存在しない：このような φ^* が存在したとする．各有限の n に対して，濃度が n 以上の有限 L-構造 M_n が存在する．このことは，$T = \{\varphi^*\} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ の各有限部分がモデルを持つことを意味する．したがって T 全体にもモデル M が存在する．この M は無限だが φ^* を成り立たせている．矛盾．κ を無限基数とするとき，「$M \models \varphi_\kappa \iff M$ の濃度は κ」となる φ_κ も存在しないことがいえる．これは次の節で述べる *Löwenheim-Skolem* の定理からもわかる．

3.4 Löwenheim-Skolem の定理

定義 49 （部分構造）M を L-構造とする．部分集合 $N \subset M$ が次の条件を満たすとき M の部分構造と呼ばれる．

1. $c \in L$ が定数記号のとき，$c^M \in N$；
2. $F \in L$ が関数記号のとき，F^M で N は閉じている．

N が M の部分構造のとき，各記号の解釈を N に制限することにより，N は自然に L-構造になる．すなわち，定数記号に対しては，$c^N = c^M$, n-変数関数記号に対しては，$F^N = F^M | N^n$, m-変数述語記号については，$P^N = P^M \cap N^m$ とする．

問 50 群を $\{e, * \cdot *, *^{-1}\}$-構造と考えれば，部分群の概念と部分構造の概念は一致することを示せ．

定義 51 M を L-構造とする．

1. $A \subset M$ とする．言語 L に新しい定数記号 c_a たち（$a \in A$）を付加した言語を $L(A)$ とかく．M は自然に $L(A)$ 構造となる．すなわち，$c_A^M = a$ と解釈する．

2. 部分構造 $N \subset M$ は次の条件を満たすとき，基本部分構造（elementary substructure）と呼ばれる：

   (*) 任意の $L(N)$-閉論理式 φ に対して，$M \models \varphi \iff N \models \varphi$.

   このとき，M は N の基本拡大とよばれる．

3. N が M の基本部分構造のとき，$N \prec M$ あるいは $M \succ N$ とかく．

例 52 M を L-構造とする．T^* を M で成立する $L(M)$-閉論理式全体の集合とする．この T^* を T の基本設計図（*elementary diagram*）という．T の勝手なモデルは M の基本拡大と思うことができる．実際 $a \in M$ に対して，c_a^N を対応させる関数 σ が基本部分構造としての埋め込みになっている．すなわち，$\sigma : M \cong \sigma(M) \prec N$．別の言葉で言えば，$\sigma$ が基本写像になっている．

問 53 *1.* 基本部分構造の定義の *(*)* において，片側向きの矢印が成立すれば実は両側向きの矢印が成立する．

2. $\prec$ に対して推移性が成り立つことを示せ．

以下において M は濃度が無限の L-構造とする．

補題 54 κ を無限基数とするとき，M の基本拡大で濃度が κ 以上のものが存在する．

Proof: T^* を M の基本設計図とする．$L(M)$ に属さない新しい定数記号を κ 個容易する．それらを $\{c_i : i < \kappa\}$ とする．$L(M) \cup \{c_i : i < \kappa\}$-閉論理式の集合

$$T^{**} = T^* \cup \{c_i \neq c_j : i < j < \kappa\}$$

を考える．明らかに T^{**} の有限部分はモデルを持つ.（有限個の c_i たちはすべて異なるように M の中で解釈してやることができる.）したがって，T^{**} のモデル N が存在する．$N \succ M$ と考えることができる．また T^{**} の条件から，N は κ 個の異なる元を有するので濃度は κ 以上である． ∎

上の補題は，構造の大きさを大きい方に変えることができることを意味している．次に構造の大きさを小さくする方向を考える．その場合に重要になるのが，基本部分構造の判定条件である．

補題 55 *(Tarski-Vaught の判定条件)* M を L-構造とする．$N \subset M$ に対して，次は同値である：

1. $N \prec M$;
2. 勝手な $L(N)$-論理式 $\varphi(x)$ に対して，

$$M \models \exists \varphi(x) \ \Rightarrow \ M \models \varphi(a) \text{ となる } a \in N \text{ が存在する．}$$

Proof: $1 \Rightarrow 2$ は易しいので省略（演習問題）．
$2 \Rightarrow 1$: L-論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ の構成に関する帰納法で次を示す：

$$(*)\ M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff N \models \varphi(a_1, ..., a_n) \quad (\forall a_1, ..., a_n \in N)$$

構造の定義から原子論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ に対しては，(*) は成立する．問題は $\varphi(x_1, ..., x_n)$ が $\exists y \psi(y, x_1, ..., x_n)$ の場合である．

$$\begin{aligned} M \models \exists y \psi(y, a_1, ..., a_n) &\iff M \models \psi(b, a_1, ..., a_n) \ \ (\exists b \in N) \\ &\iff N \models \psi(b, a_1, ..., a_n) \ \ (\exists b \in N) \\ &\iff N \models \exists \psi(y, a_1, ..., a_n) \end{aligned}$$

ここで，１行目の同値性は条件２による．また１行目と２行目の間の同値性は帰納法の仮定による． ∎

以下では集合 A の濃度は $|A|$ で表すことにする．

補題 56 M を L-構造とする．$A \subset M$ に対して，$N \prec M$ で次の条件を満たすものが存在する．

1. $A \subset N$;
2. $|M| \leq |A| + |L| + \aleph_0$

Proof: $A_0 = A$ からはじめて，M の部分集合の上昇列 A_i $(i < \omega)$ を次の条件を満たすように帰納的に構成することができる：各 $i > 0$ に対して，

- $L(A_{i-1})$-論理式 $\varphi(x)$ が M に解を持てばそのうち少なくとも一つは A_i の中にある；
- $|A_i| \leq |A| + |L| + \aleph_0$.

実際，$|A_i| \leq |A|+|L|+\aleph_0$ のとき，$L(A_i)$-論理式の数も $|A|+|L|+\aleph_0$ 以下なので，それらの論理式の解を１つづつ A_i に付加したものを A_{i+1} とすればよい．

最終的にすべての A_i たちが定義された時点で，$N = \bigcup_{i\in\omega} A_i$ とすれば，明らかに濃度の条件 2 は成立する．Tarski-Vaught の判定条件により，$N \prec M$ となる． ∎

定理 57 （*Löwenheim-Skolem* の定理）T を L-閉論理式の一つの集合とする．T が無限モデルを持てば，任意の基数 $\kappa \geq |L|+\aleph_0$ に対して，T のモデル N で濃度が丁度 κ になるものが存在する．

Proof: M を T の無限モデルとする．補題 54 により，$M^* \succ M$ で濃度が κ 以上になるものが存在する．$A \subset M^*$ を濃度が丁度 κ の集合とする．補題 56 により，A を含む $N \prec M^*$ で濃度が $|A|+|L|+\aleph_0 (=\kappa)$ 以下になるものが存在する．しかし，$N \supset A$ だから $|N| \geq \kappa$．よって，N の濃度は丁度 κ である． ∎

二つの L-構造 M,N がまったく同じ L-閉論理式を満たすとき，それらは elementarily equivalent であるといい，$M \equiv N$ とかく．

系 58 *L が可算言語とし，M を L-構造とする．勝手な無限基数 κ に対して，$N \equiv M$, $|N| = \kappa$ となる N が存在する．*

4 各種のモデル

4.1 Elementary Chain Theorem とその応用

まず次の例からはじめよう．

例 59 $\{M_i : i \in \omega\}$ を L-構造としての拡大列とする．各 M_i が T のモデルのとき，$\bigcup_{i\in\omega} M_i$ も T のモデルになるだろうか？T が「群の公理」や「体の公理」のときは大丈夫である．しかし，一般には正しくない：各 $i \in \omega$ に対して，$M_i = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq -i\}$ とする．M_i に通常の順序を入れて，$\{<\}$-構造とみる．このとき，

- $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ ($\{<\}$-構造としての拡大列)；
- $M_i \models$ “$<$ は最小元を持つ全順序”

が成立する．しかし，$\bigcup_{i\in\omega} M_i = \mathbb{Z}$ は最小元は持たない．

定義 60 α を順序数とする．長さ α の L-構造の列 $(M_i)_{i<\alpha}$ が条件

(*) $i < j < \alpha \Rightarrow M_i \prec M_j$.

を満たすとき，基本鎖（elementary chain）と呼ばれる．

定理 61 *(Elementary Chain Theorem)* $(M_i)_{i<\alpha}$ を基本鎖とする．このとき，$M^* = \bigcup_{i<\alpha} M_i$ は自然に L-構造となり，各 M_i は M^* の基本部分構造になる．

Proof: M^* 上に定数記号，関数記号，述語記号の解釈を導入する．c^{M^*} は一定の値 c^{M_i} とする．また，m 変数述語記号 P の解釈は $P^{M^*} = \bigcup_{i<\alpha} P^{M_i}$ とする．n 変数関数記号 F の解釈も（集合論的にかけば）$F^{M^*} = \bigcup_{i<\alpha} F^{M_i}$ とすればよい．

主張 $M_i \prec M^*$

次の命題を $n \in \omega$ に関する帰納法で示せばよい．

$(*)_n$ 任意の $i < \alpha$ と論理記号の数が n 以下の任意の $L(M_i)$-閉論理式 φ に対して次が成立する：$M^* \models \varphi \;\Rightarrow\; M_i \models \varphi$

$n = 0$ のとき，すなわち φ が原子論理式のときは明らか．帰納法のステージでは，φ が $\exists x\psi(x)$ の形のときが本質的である．（その他の論理記号については演習問題．）$M^* \models \exists\psi(x)$ とする．このとき，$\psi(x)$ の解 $d \in M^*$ が存在するが，M^* はモデルの和の形をしているので，$d \in M_j$ となる M_j がある．$i < j$ としてよい．帰納法の仮定から $M_j \models \psi(d)$ である．よって，$M_j \models \exists x\psi(x)$. $M_i \prec M_j$ だから $M_i \models \varphi$.

定義 62 （有限充足性とタイプ）

1. M を L 構造とし，$A \subset M$ とする．列 $\bar{x} = x_1, ..., x_n$ を自由変数として持つ $L(A)$-論理式の集合 $\Phi(\bar{x})$ が M において有限充足的であるとは，任意有限個の $\varphi_1(\bar{x}), ..., \varphi_n(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$ に対して，

$$M \models \exists\bar{x}[\varphi_1(\bar{x}) \wedge \cdots \wedge \varphi_n(\bar{x})]$$

   が成立（共通解が存在）することである．$\Phi(\bar{x})$ が有限充足的でなおかつ完全（すなわち任意の $L(A)$- 論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して，$\varphi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$ または $\neg\varphi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$ が成立）のとき，$\Phi(\bar{x})$ は M における A 上のタイプとよばれる．変数の数 n を強調したい場合は n 変数タイプという．

2. A 上のタイプ全体の集合を $S_M(A)$ とかく．M が明らかなときは，省略して $S(A)$ とかく．自由変数が n 個の A 上のタイプの集合を $S^n(A)$ とかくことがある．

3. $p \in S(A)$ のとき，A をタイプ p の領域（domain）とよび，$\mathrm{dom}(p)$ であらわす．

4. $p(x)$ に属するすべての $\varphi(x)$ を満たす元を $p(x)$ の解という.（解は M の中に存在するとは限らない.）

例 63 *1.* $\mathbb{N}$ を $\{<, +, 1\}$-構造とみる．$\Phi(x) = \{x > 1, x > 1+1, x > 1+1+1, \ldots\}$ は $\mathbb{N}$ で有限充足的である．しかし，$\mathbb{N}$ に解を持たない．

2. もう少し数学っぽい例．$\bar{\mathbb{Q}}$ を代数的数の全体とする.「x は $\mathbb{Q}$ 上の超越数である」という条件は

$$\Phi(x) = \{f(x) \neq 0 : f \text{ は } \mathbb{Q}\text{-係数の自明でない多項式}\}$$

という論理式の集合であらわされる．各多項式は有限個の解しか持たないので，$\Phi(x)$ は $\bar{\mathbb{Q}}$ で有限充足的である．しかし，$\Phi(x)$ の解は $\bar{\mathbb{Q}}$ にない.（拡大体の中には存在する.）

補題 64 M を L-構造として，$L(A)$-論理式の集合 $\Phi(\bar{x})$ は M で有限充足的とする．$\Phi(\bar{x})$ は A 上のタイプに拡大される．

Proof: $\Phi(x)$ を拡大した有限充足的な集合のうち極大なものが存在する（Zorn の補題）．この極大集合がタイプになっている． ∎

問 65 $p(x)$ を M におけるタイプとする．c を新しい定数記号として，$T = Th(M, a)_{a \in M} \cup p(c)$ を考える．T はモデルを持つことを示せ．($p(c)$ は $\{\varphi(c) : \varphi(x) \in p(x)\}$ のことである.)

問 66 $A \subset M \prec M^*$ とする．$L(A)$-論理式の集合 $p(\bar{x})$ に対して，$p(\bar{x})$ が M においてタイプになることと M^* においてタイプになることは同値である．

次の補題はコンパクト性定理の簡単な応用である．

補題 67 M を L-構造とする．κ を無限基数とする．このとき，次の条件を満たす基本拡大 $M^* \succ M$ が存在する：

(*) M^* におけるタイプ p が $\mathrm{dom}(p) \subset M$, $|\mathrm{dom}(p)| < \kappa$ を満たせば M^* に解を持つ．

Proof: S を M におけるタイプで条件 $|\mathrm{dom}(p)| < \kappa$ を満たすもの全体の集合とする．$p \in S$ に対して，新しい定数記号 c_p を用意して，

$$T^* = Th(M, a)_{a\in M} \cup \bigcup_{p\in S} p(c_p)$$

なる閉論理式の集合を考える．右辺第２項は各 c_p が p の解になることを主張している．T^* の各有限部分はモデルを持つので（M に定数記号 c_p たちの解釈を追加した形のモデルでよい），コンパクト性定理により T^* 全体もモデル M^* を持つ．M^* は $Th(M, a)_{a\in M}$ のモデルだから $M^* \succ M$ である．c_p の解釈が p の解になっているから，M^* は S に属する各タイプの解を少なくとも１つ持つ． ∎

上で構成したモデル M^* は domain が M に属するタイプのうち，domain の大きさが小さい（κ 未満の）ものに対する解を持っている．しかし，domain が小さくても M からはみ出るものについては解があるかどうかはわからない．

定義 68 （飽和性）M を L-構造とし，κ は無限基数とする．M が $|\mathrm{dom}(p)| < \kappa$ なるすべてのタイプ p の解を持つとき，κ-飽和 (κ-saturated) であるといわれる．

定理 69 M を L-構造とし，κ は無限基数とする．M の拡大 $M^* \succ M$ で κ^+-飽和なものが存在する．

Proof: $M_0 = M$ から始まる elementary chain $(M_i)_{i<\kappa^+}$ を以下の条件が成り立つように作る：

1. $A \subset M_i$, $|A| < \kappa^+$ ならば A 上のすべてのタイプは M_{i+1} に解を持つ．
2. δ が極限順序数のときは，$M_\delta = \bigcup_{i<\delta} M_i$.

補題67と elementary chain の性質61により，このような elementary chain は存在する．$M^* = M_{\kappa^+}$ が求める κ^+-飽和な構造である．実際，$A \subset M^*$ を濃度が κ 以下の集合とすれば，$A \subset M_i$ となる $M_i \prec M^*$ が存在する．したがって，A 上のすべてのタイプは $M_{i+1} \prec M^*$ で解を持つ．（A 上のタイプの概念は M_{i+1} で考えても M^* で考えても同じになることに注意.）∎

注意 70 L が可算の場合を考える．可算構造 M からはじめることにより，上の命題による構成を行う．このとき，κ^+-飽和な $M^* \succ M$ で濃度が 2^κ なものを作ることができる．

定義 71 M を L-構造とする．$\bar{a} = a_1, ..., a_n \in M$ および $A \subset M$ に対して，

$$\mathrm{tp}_M(a_1, ..., a_n/A) = \{\varphi(x_1, ..., x_n) : \varphi(x_1, ..., x_m) \text{ は } M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \text{ となる } L(A)\text{-論理式}\}$$

を（M における）$\bar{a}$ の A 上のタイプという．M が明らかなときは省略する．

この表記のもとに，A 上のタイプ $p(\bar{x})$ が M に解を持つということは $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = p(\bar{x})$ となる $\bar{a} \in M$ が存在することと書きなおすことができる．また M が κ-飽和であることは，濃度が κ 未満の $A \subset M$ 上のタイプはすべて $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ $(\bar{a} \in M)$ の形でかけることと同値になる．

問 72 $M \equiv N$ を $\aleph_0$-飽和な L-構造とする．$\mathrm{tp}_M(\bar{a}) = \mathrm{tp}_N(\bar{b})$ なるとき，勝手な $a \in M$ に対して，適当に $b \in M$ を選べば，$\mathrm{tp}_M(\bar{a}, a) = \mathrm{tp}_N(\bar{b}, b)$ とできる．（ヒント：$p(\bar{x}, x) = \mathrm{tp}_M(\bar{a}, a)$ とする．条件）$\mathrm{tp}_M(\bar{a}) = \mathrm{tp}_N(\bar{b})$ から $p(\bar{b}, x)$ は N におけるタイプとなり，飽和性から解 $b \in N$ を持つ．このとき，$\mathrm{tp}(\bar{a}, a) = \mathrm{tp}(\bar{b}, b)$ である．M と N が *elementarily equivalent* という仮定は，$\bar{a}$,$\bar{b}$ が空列の場合に使われる．）

4.2 Omitting Types Theorem

この節では L は可算とし，T はモデルを持つ L-閉論理式の集合とする．この節での可算性の仮定は本質的である．特にタイプの排除定理はこの仮定なしには成り立たない．

前節では，なるべく多くのタイプが解を持つように構造を拡大することを考えてた．ここでは，その反対になるべくタイプが解を持たないように構造を作りたい．

定義 73 $\Sigma(x)$ を L-論理式の集合とする．

1. 次の条件を満たす L-論理式 $\varphi(x)$ があるとき，$\Sigma(x)$ は T で isolate されるという：

   (a) $T \cup \{\exists \varphi(x)\}$ はモデルを持つ；

(b) 任意の T のモデル M において，$\varphi(x)$ の解はすべて $\Sigma(x)$ の解になる．（このことを $T \models \forall x[\varphi(x) \to \Sigma(x)]$ とかく．）

2. $\Sigma(x)$ が M に解を持たないとき，$\Sigma(x)$ は M で排除（omit）されるという．

上の定義から直ちに，T が完全でなおかつ $\Sigma(x)$ が T で isolate されるとき，任意の T のモデルは $\Sigma(x)$ の解を持つことがわかる．

定理 74 （タイプの排除定理）T で $\Sigma(x)$ が *isolate* されなければ，$\Sigma(x)$ を排除する T のモデルが存在する．

Proof: L に属さない可算個の新しい定数記号 $\{c_i : i \in \omega\}$ を用意する．$L_i = L \cup \{c_j : j < i\}$ とおく．$L \cup \{c_i : i \in \omega\}$ に属する 1 変数論理式を一列にならべて $\varphi_i(x)$（$i \in \omega$）とする．ただし，φ_i は L_i-論理式になるようにしておく．L_i-閉論理式の集合 $T_0 = T$ からはじめて T_i（$i \in \omega$）を次のように定義してゆく：

(*) $T_{i+1} = T_i \cup \{\exists x \varphi_i(x) \to \varphi_i(c_i)\} \cup \{\neg\sigma_i(c_i)\}$,

ただし $\sigma_i(x) \in \Sigma(x)$ は T_{i+1} がモデルを持つようにとる．

主張 実際，T_{i+1} がモデルを持つように $\sigma_i \in \Sigma$ はとれる．

$\sigma_i \in \Sigma$ の取り方によらず，T_{i+1} がモデルを持たない（最小の）i があったとする．このとき，T_i の T 以外の部分をまとめて（$\wedge$ でつなげて）$\theta(\bar{c})$ とかけば，

$$T \models \forall x[\theta(x, \bar{c}) \wedge (\exists x \varphi_i(x) \to \varphi_i(c_i)) \to \Sigma(x)]$$

を得る．$\bar{c}$ は T に属さない定数記号の列なので，

$$T \models \forall x[\exists \bar{y} \theta(x, \bar{y}) \to \Sigma(x)].$$

これは Σ が T で isolate されることを意味するので矛盾．（主張の証明終わり）

以上から，T_i たちが構成された．$T^* = \bigcup_{i\in\omega} T_i$ とおいて，$M^* \models T^*$ をとる．M^* の中の必要な部分 $M = \{c_i^{M^*} : i \in \omega\}$ だけを抜き出す．条件 (*) から Tarski-Vaught の判定条件により，$M \prec M^*$ がわかる．また各 c_i に対して，$\neg\sigma_i(c_i)$ となる $\sigma_i \in \Sigma$ があるので，M は Σ の解を持たない．∎

問 75 （拡張されたタイプの排除定理）$\Sigma_i(x)(i \in \omega)$ を T で isolate されない論理式の集合とする．このとき，すべての $\Sigma_i(x)$ を排除する T のモデルが存在する．これを示せ．

例 76 M を（論理式でかかれた）ペアノ公理系の可算モデルとする．N が M の elementary end extension であるとは，(i) $M \prec N$, (ii) $a \in M, b \in N, b < a \Rightarrow b \in M$ が成り立つことである．すなわち，N は M の基本拡大だが，増えている元は M の後ろだけに現れている．M の（真の）elementary end extension は存在する．

Proof: c を新しい定数記号として言語 $L(M)$ に付加する．この新しい言語における理論 T^* を

$$T^* = Th(M, a)_{a \in M} \cup \{c > a : a \in M\}$$

とする．T^* のモデルは M の真の elementary extension となる．

Claim 1 $\varphi(x)$ を $L(M)$-*formula* とする．$T^* \cup \{\varphi(c)\}$ が *consisitent* になる必要十分条件は

$$M \models \exists^\infty y \varphi(y)$$

となることである．

$T^* \cup \{\varphi(c)\}$ が consistent とすれば，T^* のモデルで，$M^* \models \varphi(c)$ となるものが存在する．$a \in M$ が与えられたとき，$M^* \models \exists y[y > a \wedge \varphi(y)]$（$c$ がその解）だから，

$$M \models \exists y[y > a \wedge \varphi(y)].$$

$a \in M$ は任意なので，このことは $M \models \exists^\infty y \varphi(y)$ を意味する．

さて，$b \in M$ に対して，(partial) type $\Sigma_b(x)$ を

$$\Sigma_b(x) = \{x < b\} \cup \{x \neq d : d \in M, d < b\}$$

とする．次の主張がいえればよい（拡張されたタイプの排除定理）．

Claim 2 $\Sigma_b(x)$ は T^* において *isolate* されない．

$\Sigma_b(x)$ が $\varphi(x, c)$ によって isolate されたとする．すなわち，

1. $T^* \cup \{\varphi(x, c)\} \vdash x < b$;
2. $T^* \cup \{\varphi(x, c)\} \vdash x \neq d \quad (\forall d <_M b)$

条件 1 より，特に $\exists x < b\ \varphi(x,c)$ は T^* と consistent．したがって，Claim 1 により，

$$M \models \exists^\infty y\ \exists x < b\ \varphi(x,y).$$

b 未満の M の元は（M の意味で）有限個なので，部屋割り論法により，

$$M \models \exists x < b\ \exists^\infty y\ \varphi(x,y). \tag{1}$$

$$M \models \exists^\infty y\ \varphi(d,y) \ \ (\text{for some } d \in M \text{ with } d < b) \tag{2}$$

このことは，主張 1 により，次の集合が consisitent になるこを示す.

$$T^* \cup \{\varphi(x,c)\} \cup \{x = d\}.$$

これは条件 2 に反する.

5 ペアノの公理

5.1 ペアノ (Peano) の公理

定義 77 算術の言語 L_A とは

$$L_A = \{0, S, +, \cdot, <\}$$

である．ただし，0 は定数記号，S は 1 変数関数記号，$+, \cdot$ は 2 変数関数記号である．また *Peano* の公理（PA）とは次の L_A-論理式の集合である.

1. S に関する公理：
   - $\forall x (S(x) \neq 0)$;
   - $\forall x, y (S(x) = S(y) \to x = y)$;
2. $<$ に関する公理：
   - 全順序の公理;
   - 0 は最小元;
   - $\forall x, y (x < Sy \leftrightarrow x \leq y)$;
3. $+$ に関する公理：

- $\forall x(x+0=x)$;
- $\forall x,y(x+Sy=S(x+y))$;

4. $\cdot$ に関する公理：

- $\forall x(x \cdot 0 = 0)$;
- $\forall x,y(x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$;

5. 帰納法の公理群：

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x \varphi(x),$$

φ は L_A-論理式で，自由変数を x 以外に含んでいてもよい．

問 78 S の解釈を $S(n)=n+1$ とするとき，$\mathbb{N}$ は PA のモデルになることを示せ．

問 79

1. $PA \vdash \forall y(y \neq 0 \to \exists x(y = S(x)))$.
2. $PA \vdash \forall x(S^n(x) \neq x)$ $(n = 1, 2, ...)$.
3. $PA \vdash \forall x(x+0=0+x)$.
4. $PA \vdash \forall x,y(Sx+y=x+Sy)$ (induction on y).
5. $PA \vdash \forall x,y(x+y=y+x)$.
6. $PA \vdash \forall x,y(x \cdot y = y \cdot x)$.

定義 80 $n \in \omega$ に対して，L_A の項 $S^n(0)$ を $\overline{n}$ と略記する．ただし，$\overline{0}$ は 0 である．

補題 81 $m, n \in \omega$ とする．

1. $PA \vdash \overline{m+n} = \overline{m} + \overline{n}$.

2. $PA \vdash \forall x(x < \overline{n+1} \leftrightarrow \bigvee_{m \leq n} x = \overline{m})$.

Proof: 1. n に関する帰納法による.（注意. formal induction ではない.）

2. 左辺は $x \leq \overline{n}$ と同値（$<$ の公理）. $n = 0$ のとき，0 が最小元なので，これは $x = 0$ と同値になる. また一般の場合，

$$\begin{array}{rcll} x < \overline{n+1} & \leftrightarrow & x < S(\overline{n}) & \\ & \leftrightarrow & x \leq \overline{n} & \cdots < \text{の公理} \\ & \leftrightarrow & x = \overline{n} \vee x < \overline{n}. & \end{array}$$

最後の行に帰納法を適用すればよい.（これも外側での帰納法.）

注意 82 以下では誤解のない範囲で，$\overline{n}$ を単に n とかく.

問 83 以下の論理式が PA で証明できることを示せ.

1. $\forall x, y[y \neq 0 \to \exists z, w(x = x \cdot z + w \wedge w < y)]$.
2. $\forall z \exists x, y(< x, y >= z)$, ただし $< x, y >= (x+y)(x+y+1)/2 + y$.
3. $\forall x, y, x', y'(< x, y >=< x', y' >\to x = x' \wedge y = y')$.

定義 84 PA の拡大. L_A に 2 変数関数記号 E を加えた言語を考え，次の公理を PA に付加する.

6. べきの公理（x^y を想定した関数）：
   - $\forall x E(x, 0) = 1$.
   - $\forall x, y(E(x, Sy) = E(x, y) \cdot x)$.

また，帰納法の適用される論理式の範囲も $L_A \cup \{E\}$-論理式にまで拡大する. この体系を PA^+ とかくことにする.

事実 85 実は E は PA で定義される関数である. すなわち 3 変数の L_A-論理式 $\theta(x, y, z)$ が存在して，べきの公理を満たす：

- $PA \vdash \forall x, y \exists! z \theta(x, y, z)$.
- $PA \vdash \forall x[\theta(x, 0, 1)]$
- $PA \vdash \forall x, y \exists z, w[\theta(x, Sy, z) \wedge \theta(x, y, w) \wedge z = w \cdot x]$.

問 86 θ' もべきの公理を満たすとき，$PA \vdash \forall x, y, z \theta(x, y, z) \leftrightarrow \theta'(x, y, z)$ となることを示せ.

以上の事実により，PA にはべき乗関数は関数記号として定義されてはいないが，論理式で定義されるので，べき乗関数が PA 内部に存在すると考えてよい．すなわち，$PA^+ = PA$ と考えることができる．さらに，べき乗関数を定義する論理式の階層（後でのべる）はかなり低いことが知られている．

問 87 $PA^+ = PA$ の意味を述べよ．

5.2 論理式の階層

省略形：$\exists x < a\,\varphi$ は $\exists x\,(x < a \wedge \varphi)$ の省略形である．また $\forall x < a\,\varphi$ は $\forall x\,(x < a \to \varphi)$ の省略形である．また適宜 $\exists x \leq a\,\varphi$ などの省略形も用いる（何の省略形であるかは上のことから自明であろう）．$\exists x < a\,\varphi$ などの形の quantifier を有界量化記号 (bounded quantifier) とよぶ．

定義 88
1. 原始論理式を全て含み，ブール結合，有界量化記号 ($\exists x < t$, $\forall x < t$, t は x を持たない term) をつける操作で閉じた論理式の最小集合を Δ_0 とかく．
2. $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$ として，帰納的に
$$\Sigma_{n+1} = \{\exists x_n \varphi : \varphi \in \Pi_n\},$$
$$\Pi_{n+1} = \{\forall x_n \varphi : \varphi \in \Sigma_n\}$$
を定める．
3. $\Sigma_n(PA) = \{\varphi :\ PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \ \ (\exists \psi \in \Sigma_n)\}$. $\Pi_n(PA) = \{\varphi :\ PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \ \ (\exists \psi \in \Pi_n)\}$.

注意 89 与えられた論理式が Σ_n, Π_n に属するか否かは，論理式の形によって簡単に判断できる．しかし，$\Sigma_n(PA)$, $\Pi_n(PA)$ に属するかどうかは形だけでは判断できない．

命題 90 $\Sigma_n(PA)$ および $\Pi_n(PA)$ は有界量化記号で閉じている．

Proof: 正確には帰納法による．$\Sigma_1(PA)$ が $\forall x < u$ 量化記号で閉じていることを示す．$\varphi(x) \in \Sigma_1(PA)$ とする．これと同等な $\varphi_0(x) \in \Sigma_1$ が存在する．$\varphi_0(x)$ は，原始論理式 θ を用いて，
$$\varphi_0(x) \ = \ \exists y \theta(x, y)$$
という形にかけている．

主張 A $PA \vdash \forall x < u \exists y \theta(x,y) \to \exists z \forall x < u \exists y < z \theta(x,y)$.

以下 $M \models PA$ で議論する．与えられた $a \in M$ に対して，

$$M \models \forall x < a \exists y \theta(x,y) \to \exists z \forall x < a \exists y < z \theta(x,y)$$

を示せばよい．そこで $M \models \forall x < a \exists y \theta(x,y)$ を仮定する．

$$u \leq a \to \exists z \forall x < u \exists y < z \theta(x,y)$$

を $\chi(u)$ とかく．$M \models \forall u \chi(u)$ を M の中の帰納法で示す．$\chi(0)$ は成立している．また $\chi(b)$ が $b \leq a$ に対して成立していると仮定する．($b+1 \geq a$ ならば，自明に $\chi(b+1)$ が成立するので）$b+1 < a$ と仮定する．帰納法の仮定から $d \in M$ で $\forall x < b \exists y < d \theta(x,y)$ となる d は存在する．また $e \in M$ を $M \models \theta(b,e)$ なる元とする．$d^* = \max\{d,e\}$ とすれば，

$$M \models \forall x < b+1 \exists y < d^* \theta(x,y)$$

を得る．すなわち $\chi(b+1)$ を得る．帰納法から $M \models \forall u \chi(u)$. 特に $u = a$ とすれば，目的の式を得ることになる．(End Claim)

上の逆向きは明らかなので，結局次を得る．

主張 B $PA \vdash \forall x < u \exists y \theta(x,y) \leftrightarrow \exists z \forall x < u \exists y < z \theta(x,y)$.

左辺は $\forall x < u \varphi_0$ であり，それは $\forall x < u \varphi$ と同値である．また右辺は Σ_1-論理式である．よって結論が証明された．

問 91
1. $\Sigma_1(PA)$ が $\exists x < u$ をつけることで閉じていることを示せ.（ヒント： 命題 *90* より，ずっとやさしい理由による.）
2. 命題 *90* の証明で，$\forall u \chi(u)$ を示すためには，Σ_1-論理式に対する帰納法があれば十分なことを示せ.（ヒント：$\chi(u) \in \Sigma_1$ となることに注意せよ.）

5.3　終端拡大 (End Extension)

定義 92 $M,\ N \models PA$ で，N が M の拡大構造（M が N の部分構造）になっているとする．N が M の端拡大（*end extension*）であるとは，

- $a \in M,\ b \in N,\ b < a\ \Rightarrow\ b \in M$

が成り立つことである．すなわち，$N \setminus M$ に属する元が M よりも後ろに現れているとき，端拡大という．

定理 93 $M \models PA$ を可算モデルとする．M の（真の）基本端拡大（*elementary end extension*）は存在する．

Proof: c を新しい定数記号として言語 $L(M)$ に付加する．この新しい言語における理論 T^* を

$$T^* = Th(M, a)_{a \in M} \cup \{c > a : a \in M\}$$

とする．T^* のモデルは M の真の elementary extension となる．

主張 A $\varphi(x)$ を $L(M)$-*formula* とする．$T^* \cup \{\varphi(c)\}$ が *consisitent* になる必要十分条件は

$$M \models \exists^\infty y \varphi(y)$$

となることである．

$T^* \cup \{\varphi(c)\}$ が consistent とすれば，T^* のモデルで，$M^* \models \varphi(c)$ となるものが存在する．$a \in M$ が与えられたとき，$M^* \models \exists y[y > a \wedge \varphi(y)]$（$c$ がその解）だから，

$$M \models \exists y[y > a \wedge \varphi(y)].$$

$a \in M$ は任意なので，このことは $M \models \exists^\infty y \varphi(y)$ を意味する．

さて，$b \in M$ に対して，(partial) type $\Sigma_b(x)$ を

$$\Sigma_b(x) = \{x < b\} \cup \{x \neq d : d \in M, d < b\}$$

とする．次の主張がいえればよい（拡張されたタイプの排除定理）．

主張 B $\Sigma_b(x)$ は T^* において *isolate* されない．

$\Sigma_b(x)$ が $\varphi(x, c)$ によって isolate されたとする．すなわち，

1. $T^* \cup \{\varphi(x, c)\} \vdash x < b$;
2. $T^* \cup \{\varphi(x, c)\} \vdash x \neq d \quad (\forall d <_M b)$

条件 1 より，特に $\exists x < b\ \varphi(x,c)$ は T^* と consistent．したがって，Claim 1 により，

$$M \models \exists^\infty y\ \exists x < b\ \varphi(x,y).$$

b 未満の M の元は（M の意味で）有限個なので，部屋割り論法により，

$$M \models \exists x < b\ \exists^\infty y\ \varphi(x,y). \tag{3}$$

$$M \models \exists^\infty y\ \varphi(d,y) \quad (\text{for some } d \in M \text{ with } d < b) \tag{4}$$

このことは，主張 1 により，次の集合が consisitent になるこを示す.

$$T^* \cup \{\varphi(x,c)\} \cup \{x = d\}.$$

これは条件 2 に反する.

6 量化記号消去とモデル完全性

6.1 準備

定義 94

1. Δ を L-論理式の集合とする．T が Δ-消去性（Δ-elimination）を持つとは，T のもとで任意の論理式 $\varphi(\bar{x})$ が Δ に属する論理式 $\psi(\bar{x})$ と同値になることである.
2. T が量化記号消去を許すとは，T のもとで，任意の論理式 $\varphi(\bar{x})$ が量化記号を持たない論理式 $\psi(\bar{x})$ と同値になることである.
3. $M \equiv_\Delta N \Leftrightarrow$ 任意の閉論理式 $\varphi \in \Delta$ に対して，$M \models \varphi \iff N \models \varphi$．$\Delta$ が閉論理式全体のときは，$M \equiv N$ とかく.

注意 95

1. QF を量化記号を持たない論理式全体とする．このとき，T が量化記号を消去することと，T が QF-elimination を持つこととは同値である.
2. 量化記号のない閉論理式が存在しなければ，量化記号消去が絶対に不可能になってしまう．このことを回避するための方法はいくつかあるが，ここでは L が定数記号を少なくとも一つ含むとする.

命題 96 Δ はブール結合（*Boolean combination*）で閉じているとする．次は同値である.

1. T が Δ-*elimination* を持つ．

2. 任意の $M, N \models T$，および同じ長さの $\bar{a} \in M$，$\bar{b} \in N$ に対して，

$$(M, \bar{a}) \equiv_\Delta (N, \bar{b}) \;\Rightarrow\; (M, \bar{a}) \equiv (N, \bar{b}).$$

Proof: $(1 \Rightarrow 2)$ は明らかである．$(2 \Rightarrow 1)$ を示す．1 でないとする．このとき，論理式 $\varphi(\bar{x})$ で，どんな Δ-論理式とも同値にならないものが存在する．

$$\Psi = \{\psi(\bar{x}) \in \Delta : T \models \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))\}$$

とする．

主張 A $T \cup \{\varphi(\bar{x})\} \cup \{\neg\psi(\bar{x}) : \psi(\bar{x}) \in \Psi\}$ は整合的である．

整合的でないとすれば，有限個の $\psi_1, ..., \psi_m \in \Psi$ を選んで，

$$T \models \forall \bar{x}[\varphi(\bar{x}) \to \bigvee \psi_i(\bar{x})].$$

Ψ の定義から，$\bigvee \psi_i(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})$ も T のもとで成立する．よって，$\varphi(\bar{x})$ は Δ-論理式 $\bigvee \psi_i(\bar{x})$ と同値になる．これは矛盾である．(Claim A の証明終わり)

このことから，$M \models T$ および $\bar{a} \in M$ を

- $M \models \varphi(\bar{a})$,
- $M \models \neg\psi(\bar{a})$ $(\forall \psi \in \Delta)$

となるように選ぶ．$\Gamma(\bar{x})$ を $\bar{a}$ によって満たされる Δ-タイプとする．すなわち，

$$\Gamma(\bar{x}) = \mathrm{tp}_\Delta(\bar{a}) = \{\psi(\bar{x}) \in \Delta : M \models \psi(\bar{a})\}.$$

主張 B $T \cup \{\neg\varphi(\bar{x})\} \cup \Gamma(\bar{x})$ は整合的である．

整合的でないとすれば，$\psi_1(\bar{x}), ..., \psi_n(\bar{x}) \in \Gamma$ を選んで，

$$T \models \forall \bar{x}[\bigwedge \psi_i(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})].$$

よって，$\bigwedge \psi_i(\bar{x}) \in \Psi$．したがって，$\bar{a}$ の性質から，$M \models \neg(\bigwedge \psi_i(\bar{a}))$．このことは，いずれかの $\psi_i(\bar{x})$ が Γ に属さないことを意味する．矛盾である．(Claim B の証明終わり) この Claim により，$N \models T$ と $\bar{b} \in N$ を

- $N \models \neg(\bar{b})$,
- $N \models \psi(\bar{b})$ $(\forall \psi \in \Gamma)$.

$(M, \bar{a})$ と $(N, \bar{b})$ は条件 2 の反例を与える．

系 97 任意の $M, N \models T$ および $\bar{a} \in M$, $\bar{b} \in N$ に対して，

$$(M, \bar{a}) \equiv_{QF} (N, \bar{b}) \Rightarrow (M, \bar{a}) \equiv (N, \bar{b})$$

が成立すれば，T は量化記号の消去を許す．また T が原子閉論理式に対して完全ならば，T は完全である．

Proposition と全く同じ論法で，次を示すことができる．

系 98 $\Delta \subset \Delta^*$ はブール結合で閉じているとする．このとき，任意の $M, N \models T$ と $\bar{a} \in M$，$\bar{b} \in N$ に対して，

$$(M, \bar{a}) \equiv_{\Delta} (N, \bar{b}) \ \Rightarrow \ (M, \bar{a}) \equiv_{\Delta^*} (N, \bar{b}).$$

が成立すれば，各 Δ^*-論理式はそれと同値な Δ-論理式を持つ．

言語 L を拡大して，量化記号消去を許す $T^* \supset T$ を作ることができる．

命題 99 各論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して，同じ個数の変数を持つ述語記号 $R_\varphi(\bar{x})$ を用意する．それらを全て L に付加してできる言語を L^* とする．

$$T^* = T \cup \{\forall \bar{x}[\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow R_\varphi(\bar{x})] : \varphi \text{ は } L\text{-論理式}\}.$$

このとき，T^* は（言語 L^* において）量化記号消去を許す．

Proof: $\psi(\bar{x})$ を L^*-論理式とする．ψ の中に現れる R_φ たちを φ で置き換えてできる論理式を $\theta(\bar{x})$ とする．T^* の定義から，

$$T \models \forall \bar{x}[\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \theta(\bar{x})]$$

である．また，$\theta(\bar{x})$ は L-論理式なので，再び T^* の定義から，$\theta(\bar{x})$ と $R_\theta(\bar{x})$ は同値になる．よって，$\psi(\bar{x})$ と $R_\theta(\bar{x})$ が同値になる．

注意 100 T^* は T の拡大であるが，L-論理式に関しては，その帰結となる範囲が T と変わらない：L-論理式 φ が $T^* \models \varphi$ とする．いま $T \cup \neg\{\varphi\}$ が整合的とする．このとき，そのモデル M が存在するが，M は各 R_ψ に対する解釈を自明に決めることにより，$M \models T^*$ とすることができる．したがって，$M \models \varphi$ でなければならない．これは矛盾である．

定義 101 1. T がモデル完全 (model complete) であるとは，任意のモデル $N \models T$ とその部分モデル $M \models T$ に対して，

$$M \prec N$$

となることである．

2. T が部分構造完全 (substructure complete) であるとは，任意の $N \models T$ の任意の部分構造 A に対して，$T \cup D(A)$ [1]が完全になることである．

注意 102 *1.* T がモデル完全になることは，任意の $M \models T$ に対して，$T \cup D(M)$ が（言語 $L(M)$ に対して）完全になることと同値である．

2. T が量化記号消去を許せば，部分構造完全である：証明は明らか．

6.2 量化記号消去と同値な条件

$\exists^*$ は $\exists x(\theta_1 \wedge .... \wedge \theta_n)$ の形の論理式（各 θ_i は原子論理式またはその否定となっている）全体の集合とする．パラメータ A を持つ $\exists^*$-論理式の全体を $\exists^*(A)$ とかく．

定理 103 T に関する次の条件は同値である：

1. T は量化記号消去を許す．

2. T は部分構造完全である．

3. 任意の $M, N \models T$ と共通部分構造 $A \subset M \cap N$ に対して，

$$M \equiv_{\exists^*(A)} N.$$

Proof: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ は明らかである．

$3 \Rightarrow 1$. $\exists^*$-論理式が量化記号消去できれば，すべての論理式が量化記号消去できる（論理式の構成に関する帰納法）．したがって，Corollary 98 により，次を示せばよいことがわかる．

[1] $D(A)$ は言語 $L(A)$ で記述された A の diagram．すなわち，$L(A)$-原子閉論理式またはその否定で $A \models \varphi$ となるもの全体．

任意の $M,N \models T$ と $\bar{a} \in M$，$\bar{b} \in N$ に対して，

$$(M,\bar{a}) \equiv_{QF} (N,\bar{b}) \ \Rightarrow\ (M,\bar{a}) \equiv_{\exists^*} (N,\bar{b}).$$

これを示そう．左辺の条件により，$\bar{a}$ と $\bar{b}$ は同じ原子論理式（とその否定）を満たす．したがって，それらにより生成される構造 A は同一視が可能で，$A \subset M \cap N$ と考えることができる．このとき，3 の条件により，$M \equiv_{\exists^*(A)} N$ を得る．よって $(M,\bar{a}) \equiv_{\exists^*} (N,\bar{b})$ を得る．

注意 104 *Theorem 103* の条件 3 に現れる A は，有限生成のものだけに限ってもよい（$3 \Rightarrow 1$ の証明から明らか）．

例 105 *1.* $T = Th(\mathbb{N},0,S)$ は量化記号消去を許す．ただし，S は x に対して，$x+1$ を対応させる関数．$M,N \models T$ とする．$\bar{a} \in M$, $\bar{b} \in N$ を $(M,\bar{a}) \equiv_{\mathrm{QF}} (N,\bar{b})$ なる元の有限列とする．$M \prec M^*$ と $N \prec N^*$ を $\bar{a}$，$\bar{b}$ と関係しないコンポーネントが同じ濃度だけある拡大とする．このとき，同型写像 $\sigma : M^* \to N^*$，$\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$ が存在する．よって $(M,\bar{a}) \equiv_{\mathrm{QF}} (N,\bar{b})$ を得る．

6.3 代数閉体

言語を $L = \{0,1,+,-,\cdot\}$（環の言語）とする．L を使って体の公理 T_{field} を記述できる．代数閉体の公理 ACF は，T_{field} に次の形の閉論理式 ($n = 1,2,...$) をすべて付加したものである．

$$\forall y_0 ... \forall y_{n-1} \exists x (x^n + y_{n-1}x^{n-1} + \cdots + y_1 x + y_0 = 0).$$

さらに以下のように標数 p の情報を付け加えたものを ACF_p とかく（$p = 0$ または正）．

- $p = 0$: $1+1 \neq 0,\ 1+1+1 \neq 0, \cdots$.
- $p > 0$: $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p} = 0$

注意 106 *1.* $\mathbb{C} \models ACF_0$.

2. ACF のモデルは無限体である．実際に，F を有限体とすれば，方程式 $1 + \prod_{a \in F}(x-a) = 0$ は F に解を持たない．

体についての復習．K を体として，$K[x]$ を一変数多項式環とする．

1. $f \in K[x]$ に対して，$\deg(f)$ は f の次数を表す．定数多項式 ($\neq 0$) の次数は 0，0 多項式の次数は $-\infty$ とする．

2. 体の拡大 $K < M$，元 $a \in M$ に対して，a の K 上最小多項式とは最高次係数が 1 の多項式 $f(x) \in K[x]$ で，$M \models f(a) = 0$ となるものである． $g(x) \in K[x]$ を $g(a) = 0$ となる多項式とすれば，$g(x)$ は最小多項式 $f(x)$ で割り切れる： $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$ $(\deg r < \deg f)$ とする．$g(a) = f(a) = 0$ なので，$r(a) = 0$ でなければならない．しかし，f の次数が最小なので，$r = 0$（0 多項式）でなければならない．

3. 最小多項式は既約多項式である．したがって，$f(x) \in K[x]$ が（a の）最小多項式のとき，$f(x) = 0$ を満たす任意の b に対しても $f(x)$ は最小多項式になる．

4. K の部分構造は整域になる．

5. A が整域のとき，A を含む最小の体 $Q(A)$ が存在する．

補題 107 A を整域とする．また $\psi(x) \in QF(A)$（量化記号のない A 上論理式）とする．このとき，次のいずれかが成立する．

1. $\psi(x)$ は A の拡大体に解を持たない．

2. 任意の拡大体 $K \supset A$ において，$\psi(K)$ は補有限集合 *(cofinite set)* である．

3. 最小多項式 $f(x) \in Q(A)[x]$ が存在して，任意の拡大体 $K \supset A$ において，
$$\forall x(f(x) = 0 \to \psi(x)).$$

2 または 3 の場合は，任意の代数閉体において $\psi(x)$ は解を持つ．

注意 108 $\psi_0(x), \psi_1(x)$ に対して，補題が成立すれば，$\psi_0(x) \vee \psi_1(x)$ に対しても補題が成立する．

Proof: 　$Q(A)$ 上の原子論理式は A 上の原子論理式でかけるので，$A = Q(A)$ としてよい．また，上の remark により，$\psi(x)$ は

$$\bigwedge_{i\in I} t_i(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j\in J} u_j(x) \neq 0$$

の形としてよい．0 次多項式は省いておく．[2]

Case 1 $I = \emptyset$. このときは，$\psi(x)$ は明らかに補有限集合を定義する[3]．よって 2 が成立する．

Case 2 $I \neq \emptyset$. a が $\psi(x)$ の解とする．$f(x)$ を a の最小多項式とすれば，$t_i(x)$ は $f(x)$ で割り切れる．また $f(x) = 0$ を満たす元は $u_j(x) = 0$ を満たすことはない．よって 3 が成立する．

定理 109 ACF_p は完全で量化記号消去を許す．

Proof: 　量化記号消去を許すことが示されれば，完全性は自動的にわかる．Theorem 103 の $3 \Rightarrow 1$ を利用する．そのために，$M, N \models ACF_p$ と共通部分整域 $A \subset M \cap N$ が与えられたとき，

$$M \equiv_{\exists^*(A)} N.$$

を示す．$\exists x\psi(x)$ を $\exists^*(A)$-閉論理式として，$M \models \exists x\psi(x)$ とする．このとき，補題により，$\psi(x)$ は A の拡大となる任意の代数閉体で解を持つ．したがって，N でも持つ．よって，$N \models \exists x\psi(x)$ を得る．対称性から，$M \equiv_{\exists^*(A)} N$ を得る．

6.4 体論への応用

事実 110 任意の体は代数閉体へ拡大される．

Proof: 　代数拡大を繰り返し行えばよい．

補題 111 (Hilbert) K を体とする．$f_1(\bar{x}) = 0, ..., f_n(\bar{x}) = 0$ を $K[\bar{x}]$-多項式による方程式系とする．このとき，次は同値である．

[2] すべてが 0 次多項式ならば，それらは A 上の QF 閉論理式で，真偽は A 上ですでに決まっている．よって 1，2 のいずれかが成立する．

[3] 代数方程式の解は有限個．

1. $f_1(\bar{x}) = 0, ..., f_n(\bar{x}) = 0$ が共通解を持つ体の拡大 $M > K$ が存在する．

2. $f_1(\bar{x}) = 0, ..., f_n(\bar{x}) = 0$ は任意の代数閉体 $M > K$ で解を持つ．

Proof: $(2 \Rightarrow 1)$ は Fact により自明である．

$(1 \Rightarrow 2)$: 1を仮定する．Fact により，M は代数閉体としてよい．任意の代数閉体 $N > K$ を考える．ACF_p（$p = ch(K)$）が部分構造完全なので，$M \equiv_{L(K)} N$ である．したがって，$f_1(\bar{x}) = 0, ..., f_n(\bar{x}) = 0$ は N においても共通解を持つ．

定理 112 (Hilbert の零点定理–weak Nullstellensatz) $R = K[\bar{x}]$ を体 K 上の多項式環とする．$f_1(\bar{x}), ..., f_n(\bar{x}) \in R$ で生成されるイデアル I が真のイデアル（R に一致しない）とする．このとき，$K < M \models ACF$ なる任意の拡大において，

$$M \models \exists \bar{x}(\bigwedge_{i=1,...,n} f_i(\bar{x}) = 0).$$

Proof: $I^* \supset I$ を極大イデアルとする．R/I^* は K の拡大体となる（$a \in K \mapsto a + I^* \in R/I^*$ の kernel は 0 となることに注意）．$\bar{x} = x_1, ..., x_m$ とするとき，R/I^* の元

$$[x_1] = x_1 + I^*, \ \dots\ , [x_m] = x_m + I^*, [0] = 0 + I^*$$

を考える．このとき，

$$f_i([x_1], ..., [x_m]) = [0] \iff f_i(x_1, ..., x_n) \in I^*.$$

しかし，右辺は成立している．したがって，R/I^* において $[x_1], ..., [x_m]$ が $f_1 = 0, ..., f_n = 0$ の共通解になっている．したがって，補題 111 により，定理が証明された．

定義 113 J を $K[\bar{x}]$ のイデアルとする．

1. $V(J)$ を J に属する多項式の共通零点とする．すなわち

$$V(J) = \{\bar{a} \in K : (\forall f \in J) f(\bar{a}) = 0\}.$$

2. $X \subset K^n$ に対して，$I(X)$ を X 上で，常に 0 となる $K[\bar{x}]$ 多項式全体とする（$lh(\bar{x}) = n$）．

注意 114　*1.* $I(X)$ は $K[\bar{x}]$ のイデアルになる．

2. $I(V(J)) \supset J$. 次の定理は，弱い意味での逆を与える．

定理 115 (Hilbert の零点定理–Nullstellensatz) $K \models ACF$ とする．J を $K[\bar{x}]$ のイデアルとする．このとき，

$$f(\bar{x}) \in I(V(J)) \quad \Rightarrow \quad f(\bar{x})^n \in J \quad (\exists n).$$

Proof:　$f(\bar{x}) \in I(V(J))$ として，$F = \{f, f^2, f^3, ...\}$ とおく．示すべきは $F \cap J \neq \emptyset$．$F \cap J = \emptyset$ として，矛盾を導く．

$$F \cap J^* = \emptyset, \quad J \subset J^*$$

なるイデアル J^* の中で極大なものをとる（Zorn の補題により可能，J^* は極大イデアルとは限らない）．

主張 A J^* は素イデアルになる．したがって $K' = K[\bar{x}]/J^*$ は K を拡大する整域になる．

$g, h \notin J^*$ とする．このとき，J^* の極大性により，$f^m = ug + v$, $f^n = u'h + v'$ となる $m, n \in \omega$, $u, u' \in K[\bar{x}]$, $v, v' \in J^*$ が存在する．よって，$f^{m+n} = (uu')(gh) + (ugv' + u'hv + vv')$ となり，$ugv' + u'hv + vv' \in J^*$ に注意すると，$gh \notin J^*$ になることが分かる．(Claim A の証明終わり）

Hilbert の基底定理により，J は有限生成なので，生成元 $g_1, ..., g_k$ がとれる．$f \in I(V(J))$ より，$K \models \forall \bar{u}(\bigwedge g_i(\bar{u}) = 0 \to f(\bar{u}) = 0)$．$K'$ の代数閉包を K^* とする．$K \prec K^*$ により，$K^* \models \forall \bar{u}(\bigwedge g_i(\bar{u}) = 0 \to f(\bar{u}) = 0)$. $K' \subset K^*$ だから，

$$K' \models \forall \bar{u}(\bigwedge g_i(\bar{u}) = 0 \to f(\bar{u}) = 0).$$

$\bar{x} = x_1, ..., x_m$ とするとき，$[x_1], ..., [x_n] \in K'$ は J に属する多項式の共通零点．よって，上の式から，$K' \models f([x_1], ...[x_m]) = [0]$ が成立しなければならない．しかし，$f \notin J^*$ なのでこれは矛盾である．

6.5 モデル完全性

定義 116 T がモデル完全（*model complete*）であるとは，

$$\left.\begin{array}{c} M \subset N\ (\text{部分構造}) \\ M \models T \\ N \models T \end{array}\right\} \Rightarrow M \prec N$$

が常に成立することである．

上のモデル完全性の定義は，部分構造が必ず基本部分構造になることを主張している．一般には T が完全であっても，部分構造が基本部分構造になるとは限らない：

例 117 $T = Th(N, <)$ とする．もちろん，N 自体は T のモデルであるが，$M = N - \{0\}$ も T のモデルとなる．しかし，$M \prec N$ ではない．実際，*1* は最小元という命題（*L(M)*-論理式でかける）は M では正しいが，N では正しくない．

例 118 F を *2* 元 a, b で生成される自由群として，$T = Th(F, e, *\cdot*, *^{-1})$ を考える．a^2, b で生成される部分群 G も F と同型になるから，T のモデルである．しかし，論理式 $\exists x[x^2 = a^2]$ は F では成立するが，G では成立しないので，$G \prec F$ ではない．

では，どういう状況のときにモデル完全になるのだろうか？

注意 119 T が量化記号の消去を許せば，モデル完全である．M, N をともに T のモデルとする．$\varphi(\bar{a})$ を $L(M)$-論理式（$\bar{a} \in M$）とする．このとき，T のもとに $\varphi(\bar{a})$ と同値になる量化記号を持たない論理式 $\psi(\bar{a})$ が存在する．このとき，量化記号のない論理式は M で成立することと，N で成立することに差がないので次が成立する：

$$\begin{aligned} M \models \varphi(\bar{a}) &\iff M \models \psi(\bar{a}) \\ &\iff N \models \psi(\bar{a}) \\ &\iff N \models \varphi(\bar{a}) \end{aligned}$$

注意 120 T がモデル完全であっても，完全になるとは限らない．*ACFp* = *ACF* + “ 標数=*p* ” を考える．ACF のモデル M の部分モデル N は M と同じ標数を持つ．したがって，ACF_p が完全で量化記号の消去を許すことを考えると ACF はモデル完全である．しかし，標数には言及していないので完全ではない．

問 121 無限個の元があることを主張する閉論理式の集合を T とする．言語 $L = \{c, d\}$（定数記号の集合）において T を考えるとき，T は完全でないが，モデル完全になる．これを示せ．

次の定理を述べる前に，言葉の定義をしておく．論理式が $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \varphi(x_1, ..., x_n, \bar{y})$ の形でなおかつ φ の部分に量化記号が現れないとき，その論理式は $\forall$ -型と呼ばれる．同様に $\exists$-型論理式も定義する．

定理 122 T に関する次の条件は同値である．

1. T はモデル完全である．
2. T のもとで，すべての論理式は $\exists$-型の論理式と同値である．
3. T のもとで，すべての論理式は $\forall$-型の論理式と同値である．

Proof: Proof. 2 と 3 の同値性は明らかである．

$2, 3 \Rightarrow 1$：2 と 3 を仮定する．$M \subset N$ を T の二つのモデルとすると，ψ が $\forall$-型の $L(M)$-論理式の場合は，$N \models \psi \Rightarrow M \models \psi$ がいえることに注意する．このことを使えば，仮定 3 により，勝手な $L(M)$-論理式 φ に対して，$N \models \varphi \Rightarrow M \models \varphi$ となる．同様に φ が $\exists$-型と同値になることを使えば，$M \models \varphi \Rightarrow N \models \varphi$ が成立する．

$1 \Rightarrow 2$: 1 を仮定し 2 を否定する．これから矛盾を出す．$\varphi(\bar{x})$ を 2 の否定を実現する論理式とする．

$$\Psi(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x}) : \psi \text{ は } \forall\text{-型}, T \models \varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})\}$$

を考えると，$\Psi'(\bar{x}) = \Psi(\bar{x}) \cup \{\neg\varphi(\bar{x})\}$ の解（$\bar{a}$ とする）を持つ T のモデル M が存在する．次に

$$T' = T \cup \mathrm{Diag}(M) \cup \{\varphi(\bar{a})\}$$

を考える．$\mathrm{Diag}(M)$ は M で成り立つ量化記号を持たない $L(M)$-閉論理式の集合である．

主張 A T' はモデルを持つ．

そうでないとすれば，コンパクト性定理により，$\psi(\bar{a}, \bar{m}) \in \mathrm{Diag}(M)$ を適当とれば，任意の T のモデルで，$\forall \bar{x} \forall \bar{y}[\varphi(\bar{x}) \to \neg\psi(\bar{x}\bar{y})$ が成立する．よって，$\forall \bar{y}[\neg\psi(\bar{x}, \bar{y})] \in \Psi(\bar{x})$ である．このことは，$\neg\psi(\bar{a}, \bar{m}) \in \mathrm{Diag}(M)$ を意味するので矛盾．(主張の証明終)

$N \models T'$ をとれば，$M \subset N$．モデル完全性（条件 1）を仮定しているので，$M \prec N$．これは，$M \models \neg\varphi(\bar{a})$ と $N \models \varphi(\bar{a})$ に矛盾する．

注意 123 上の条件 *2* は，勝手な論理式が $\exists$-型になることを求めている．しかし勝手な $\forall$-型が $\exists$-型になることだけで十分である．(論理式に出てくる $\forall$ を内側から順番に $\exists$ に変えてゆけばよい.）したがって，上の証明に使われていることを調べれば，条件 *1* より見た目上弱い形：

4. $M \subset N$ が T の二つのモデルのとき,「$\forall$-型の $L(M)$-閉論理式 φ に対して，$M \models \varphi \iff N \models \varphi$」（$M \prec_\exists N$）となる

も同値になることがわかる．しかし，注意しなければならないのは,「$M \prec_\exists N \Rightarrow M \prec N$」が成り立つと言っている訳ではない．

問 124 T のモデル完全性は次の条件と同値になることを示せ．*(*)* M が T のモデルのとき，$T \cup \mathrm{Diag}(M)$ は完全になる

問 125 *1.* T を稠密全順序（最大最小元なし）の公理とする．T は量化記号消去を許す（従ってモデル完全になる）ことを示せ．

2.

6.6 モデルコンパニオン

L で書かれた理論 T に対して，T の帰結となる $\forall$-型の L-閉論理式全体を $T_\forall$ とかく．すなわち，T のいかなるモデルでも成立する $\forall$-型の L-閉論理式全体である．

補題 126 T と S を L の理論とする．このとき次は同値である．

1. $T_\forall = S_\forall$;

2. 任意の $M \models T$ は S のモデルに拡大され（すなわち $N \models S$ となる $N \supset M$ が存在），任意の $M \models S$ は T のモデルに拡大される．

Proof: $1 \Rightarrow 2$: 1 を仮定する．$M \models T$ を任意にとる．$S' = S \cup \mathrm{Diag}(M)$ を考えよう．これがモデルを持てばよい．そうでなければ，コンパクト性により，$\varphi(\bar{a}) \in \mathrm{Diag}(M)$ を適当にとることにより，$S \cup \{\varphi(\bar{a})\}$ がすでにモデルを持たない．よって，S の勝手なモデルは $\forall x \neg\varphi(\bar{x})$ を満たす．よっ

て，$\forall x \neg\varphi(\bar{x}) \in S_\forall$．$T_\forall = S_\forall$ により，$M \models \forall x \neg\varphi(\bar{x})$．特に $M \models \neg\varphi(\bar{a})$ でなければならない．矛盾．

$2 \Rightarrow 1$: φ を $\forall$-型として，$\varphi \notin T_\forall$ とする．よって，$M \models T \cup \{\neg\varphi\}$ となるモデルが存在する．2 の仮定から M の拡大となる $N \models S$ をとる．$\neg\varphi$ は $\exists$-型（と同値）なので，$N \models \neg\varphi$．よって，$\varphi \notin S_\forall$ である．対称性から 1 を得る．

定義 127 T と S を L の理論とする．S が T のモデルコンパニオン（*model companion*）であるとは，次の 2 条件が満たされることである：

1. S はモデル完全であり，
2. $T_\forall = S_\forall$.

事実 128 T に関する次の条件は同値である：

1. T のモデルの拡大列 $\{M_i\}_{i<\omega}$ において，$\bigcup_{i<\omega} M_i$ も再び T のモデルになる．（T が拡大列で保存される．）
2. T と同等な $\forall\exists$-型の閉論理式だけからなる理論 T_0 が存在する．

Proof: $2 \Rightarrow 1$ は明らかである．$1 \Rightarrow 2$ を示す．T からの帰結のうち $\forall\exists$-型のもの全体を $T_{\forall\exists}$ とかく．$M_0 \models T_{\forall\exists}$ を任意に選ぶ．目標は $M_0 \models T$ である．$\mathrm{Diag}_\forall(M_0)$ で M_0 で成立する $\forall$-型の $L(M_0)$-閉論理式を表わすとする．このとき，次が簡単にわかる．

主張 A $T \cup \mathrm{Diag}_\forall(M_0)$ がモデルを持つ．

そうでなければ，$T \models \neg\forall x\theta(x,m)$ となる $\forall x\theta(x,m) \in \mathrm{Diag}(M_0)$ がある．このとき，$\forall y(\neg\forall x\theta(x,y)) \in T_{\forall\exists}$ となる．$M_0 \models T_{\forall\exists}$ なので $M_0 \models \forall y(\neg\forall x\theta(x,y))$ となる．よって $M_0 \models \neg\forall x\theta(x,m)$．これは矛盾である．（主張 A 証明終わり）

N_0 をそのようなモデルとすれば，$M_0 \prec_\forall N_0 \models T$ である．同様にして，

主張 B $\mathrm{Th}(M_0, a)_{a\in M_0} \cup \mathrm{Diag}(N_0)$ はモデルを持つ．

そうでないとする．$\mathrm{Th}(M_0; a)_{a\in M_0} \models \neg\theta(n)$ となる $\theta(n) \in \mathrm{Diag}(N_0)$ が存在する．このとき，$\mathrm{Th}(M_0; a)_{a\in M_0} \models \forall y\neg\theta(y)$．すなわち $M_0 \models \forall y\neg\theta(y)$．$M_0 \prec_\forall N_0$ なので，$N_0 \models \forall y\neg\theta(y)$．特に $N_0 \models \neg\theta(n)$ を得る．これは矛盾である．（主張 B の証明終わり）

そのようなモデル M_1 をとれば，$N_0 \subset M_1$ でなおかつ $M_0 \prec M_1$ となる．さらに，主張 A と同様に，次が示される．

主張 C $T \cup \mathrm{Diag}_\forall(M_1)$ はモデルを持つ．

このモデル N_1 は，$M_1 \prec_\forall N_1 \models T$ を満たす．以下同様の議論の繰り返しにより，二つの列 $\{M_i\}_{i\in\omega}$, $\{N_i\}_{i\in\omega}$ を

- $M_0 \subset N_0 \subset M_1 \subset N_1 \subset \cdots$
- $\{M_i\}_i$ は基本拡大列
- $\{N_i\}_i$ は T のモデルの拡大列

となるようにとることができる．よって，$M^* = \bigcup M_i = \bigcup M_i$ は M_0 の基本拡大である．さらに条件 1 により，$M^* \models T$ である．よって，特に $M_0 \models T$ である．以上から，勝手な $T_{\forall\exists}$ のモデルが T のモデルになることがわかった．

系 129 モデル完全な理論はモデルの拡大列で閉じている．したがって $\forall\exists$-型の閉論理式の集合で書くことができる．

定義 130 $M \models T$ が T の EC モデル（existentially closed model）であるとは次が成立することである：

(*) $\exists$-型の $L(M)$-論理式 $\exists\bar{y}\theta(\bar{x},\bar{y})$ が M の拡大となる $N \models T$ に解を持てば，すでに M の中に解が存在している（$N \models \exists\bar{y}\theta(\bar{x},\bar{y}) \Rightarrow M \models \exists\bar{y}\theta(\bar{x},\bar{y})$）.

問 131 上の定義の (*) の部分を次のようにそれぞれ変えても同等の定義になることを示せ：

1. (*) の「$\exists$-型の $L(M)$-論理式」を「量化記号を持たない $L(M)$-論理式」に変える；
2. (*) 全体を「$M \subset N \Rightarrow M \prec_\exists N$」に変える．

注意 132 T が $\forall\exists$-型の L-閉論理式からなる理論のとき，勝手な T のモデルは T の EC モデルに拡大される．これは，$\exists$-型論理式の解が存在しなければ，これらを順につけてゆき，T のモデルの拡大列を作ることができるからである．極限のモデルは $\exists$-型論理式の解が常に存在し，なおかつ T が $\forall\exists$-型のことを考えると, T のモデルになっていることも分かる．

定理 133 T を$\forall\exists$-型の L-閉論理式からなる理論とする．このとき，L-理論 S に関する次の 2 条件は同値である．

1. S は T のモデルコンパニオンである．

2. $M \models S \iff M$ は T の *EC* モデルである．

Proof: $1 \Rightarrow 2$：S が T のモデルコンパニオンのとき，勝手な $M \models S$ からはじめて T および S のモデルで交互に拡大してゆくことができる．S のモデル完全性と T が $\forall\exists$-型で書かれていることを考えると，極限のモデル M^* は $M \models S$ の基本拡大で T のモデルになっている．したがって，$M \models T$ である．すなわち,「S のモデルはすべて T のモデル」になっている．

（$\Rightarrow$）$M \models S$ とする．$M \subset N \models T$ なる N が存在する．上の構成により，$M \prec M^*$, $N \subset M^*$ となる M^* が存在する．$\exists$-型の論理式が N に解を持てば，M^* にも解を持ち，したがって $M \prec M^*$ により，M にも解を持つ．よって，M は T の EC モデルである．

($\Leftarrow$) $M \models T$ を T の EC モデルとする．$M \subset N \models S$ となる N をとる．$\forall x \exists y \theta(x; y) \in S$ を任意にとる.（θ に量化記号なし．S は $\forall\exists$-型でかかれていることに注意する.）いま $a \in M$ を任意にとると，$\theta(a, y)$ の解は $N \models S$（$N \models T$ でもある）には存在する．M が EC なので，M の中にも解がある．よって，$M \models \forall x \exists y \theta(x, y)$ となる．

$2 \Rightarrow 1$：2 を仮定する．特に S のモデルはすべて T のモデルである．また $M \models T$ が与えられたとき，T が $\forall\exists$-型なので，M を拡大して T の EC モデル N を得る．条件 2 により，$N \models S$ である．よって，モデルコンパニオンの定義の条件 $T_\forall = S_\forall$ は示された．次に S がモデル完全なことを示す．$M \subset N$ を S の二つのモデルとする．ともに T のモデルとなり，M が T の EC モデルだから，$\exists$-型の $L(M)$-閉論理式 φ に対して $M \models \varphi \iff N \models \varphi$ である．したがって，注意 123 によって，S がモデル完全なことが分かる．

7 範疇性

7.1 $\aleph_0$-範疇性

7.2 $\aleph_1$-範疇性

8 単純性

9 安定性