Expressiveness of Temporal Logics

岡本圭史

仙台高等専門学校

2012 年 8 月 29 日@モデル理論サマースクール

目標

代表的な命題時相論理の表現力比較の証明が，
素直にそれらの一階拡張に適用できるか確認する．
(→適用できた)

目次

時相論理の概論 (1)

1. **命題時相論理** = **命題論理 ＋ 時間に関する演算子**
   - **命題論理**: **いまのこのとき，命題** P **が成り立つ**
   - **命題時相論理**: **将来のある時点で，命題** P **が成り立つ**
2. **時間構造は「線形」の「分岐」の二種類を考える**
   - **線形** (linear): **割と一般的なイメージ**
   - **分岐** (branching): **晴れか雨かで，明日の世界が分岐**

時相論理の概論 (2)

1. **時相演算子** (**F**uture, ne**X**t, **U**ntil)
   - $\mathbf{F}p$: **いつか p が成り立つ**
   - $\mathbf{X}p$: **次の瞬間に p がなりたつ** (**時間は離散的とする**)
   - $p\mathbf{U}q$: **いつか q が成り立ち，それまでは p が成り立ち続ける**
2. **パス量化子** (**A**ll, **E**xists)
   - $\mathbf{A}p$: **全ての時間遷移で，p が成立**
   - $\mathbf{E}p$: **ある時間遷移が存在して，その時間遷移では p が成立**
3. **二種類の論理式**: path formula(**線形**) **と** state formula(**分岐**)

時相論理の概論 (3)

1. **線形と分岐，採用する時相演算子毎に時相論理がある**
2. Liner Temporal Logic(LTL) = **線形** $(\mathbf{F}, \mathbf{X}, \mathbf{U})$
3. Computation Tree Logic(CTL) = **分岐** $(\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{X}, \mathbf{U})$+**制約**
4. CTL* = LTL × CTL = **分岐** $(\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{X}, \mathbf{U})$
5. Propositiona Modal μ-Calculus(PMμ) = **分岐** $(\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{X}, \mu)$

LTL の構文

Proopsitional Constants (PC (**別名** Atomic Propositions))

定義 (LTL の構文)

S1 $p \in \mathrm{PC} \Rightarrow p \in \mathrm{SF}$,

P1 $p \in \mathrm{SF} \Rightarrow p \in \mathrm{PF}$,

P2 $p, q \in \mathrm{PF} \Rightarrow \neg p,\ p \wedge q \in \mathrm{PF}$,

P3b $p \in \mathrm{PF} \Rightarrow \mathbf{F}p \in \mathrm{PF}$,

P4b $p \in \mathrm{PF} \Rightarrow \mathbf{X}p \in \mathrm{PF}$,

P5b $p, q \in \mathrm{PF} \Rightarrow p\mathbf{U}q \in \mathrm{PF}$.

Path formulas (PF) **のことを** LTL **の論理式と呼ぶ．**

Structure of Propositional Temporal Logics (1)

定義

A *structure* is the triple $\mathcal{S} = \langle \boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{I} \rangle$ where

1. $\boldsymbol{S}$ is a non-empty set of States,
2. $\boldsymbol{R}$ is a binary Relation on $\boldsymbol{S}$,
3. $\boldsymbol{I}$ is an Interpretation function of the type PC $\to \wp(\boldsymbol{S})$.

Structure of Propositional Temporal Logics (2)

定義

1. A *(full) path* of a set S is a (resp. maximal) sequence $s_0, s_1, \cdots$ of states such that $(s_i, s_{i+1}) \in R$.
2. Let Π be the set of all full paths in $\mathcal{S}$.
3. For a path $\pi = s_0, s_1, \cdots$, we write π^i for $s_i, s_{i+1}, \cdots$.
4. For a path $\pi = s_0, s_1, \cdots$, we write $\pi(i)$ for s_i.

LTL の意味論

本来は $\mathcal{S}, s \Vdash p$, $\mathcal{S}, \pi \Vdash p$ などと書くべきだが，$\mathcal{S}$ は省略

定義 (LTL の意味論)

S1 $s \Vdash p \Leftrightarrow p \in I(s) \quad (p \in \mathrm{PC})$,

P1 $\pi^i \Vdash p \Leftrightarrow \pi(i) \Vdash p \quad (p \in \mathrm{SF})$,

P2i $\pi^i \Vdash \neg p \Leftrightarrow \pi^i \nVdash p \quad (p \in \mathrm{PF})$,

P2ii $\pi^i \Vdash p \wedge q \Leftrightarrow \pi^i \Vdash p$ and $\pi^i \Vdash q \quad (p, q \in \mathrm{PF})$,

P3b $\pi^i \Vdash \mathrm{F}p \Leftrightarrow \exists j \geq i. \left(\pi^j \Vdash p\right) \quad (p \in \mathrm{PF})$,

P4b $\pi^i \Vdash \mathrm{X}p \Leftrightarrow \pi^{i+1} \Vdash p \quad (p \in \mathrm{PF})$,

P5b $\pi^i \Vdash p\mathrm{U}q \Leftrightarrow \exists j \geq i. \left[\pi^j \Vdash q \text{ and } i \leq \forall k < j. \left(\pi^k \Vdash p\right)\right] \quad (p, q \in \mathrm{PF})$.

LTL のすぐ分かる性質

1. Primitives は $\mathbf{X}, \mathbf{U}$ としてよい．
   - $\pi^i \Vdash \mathbf{F}p \Leftrightarrow \pi^i \Vdash \mathbf{true}\mathbf{U}p$

CTL の構文

定義 (CTL の構文)

S1 $p \in \mathrm{PC} \;\Rightarrow\; p \in \mathrm{SF}$,

S2 $p, q \in \mathrm{SF} \;\Rightarrow\; \neg p,\ p \wedge q \in \mathrm{SF}$,

S3 $p \in \mathrm{PF} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}p, \mathbf{E}p \in \mathrm{SF}$,

P3a $p \in \mathrm{SF} \;\Rightarrow\; \mathbf{F}p \in \mathrm{PF}$,

P4a $p \in \mathrm{SF} \;\Rightarrow\; \mathbf{X}p \in \mathrm{PF}$,

P5a $p, q \in \mathrm{SF} \;\Rightarrow\; p\mathrm{U}q \in \mathrm{PF}$.

State formulas (SF) のことを CTL の論理式と呼ぶ．

時相演算子 (F, X, U) のすぐ後に，パス量化子 (A, E) が付く．

CTL の意味論

定義 (CTL の意味論)

S1 $s \Vdash p \Leftrightarrow p \in I(s) \quad (p \in \mathrm{PC})$,

S2i $s \Vdash \neg p \Leftrightarrow s \nVdash p \quad (p \in \mathrm{SF})$,

S2ii $s \Vdash p \wedge q \Leftrightarrow s \Vdash p$ and $s \Vdash q \quad (p, q \in \mathrm{SF})$,

S3i $s \Vdash \mathbf{A}p \Leftrightarrow \forall \pi \in \Pi. \left(\pi(0) = s \Rightarrow \pi^0 \Vdash p\right) \quad (p \in \mathrm{PF})$,

S3ii $s \Vdash \mathbf{E}p \Leftrightarrow \exists \pi \in \Pi.(\pi(0) = s$ and $\pi^0 \Vdash p) \quad (p \in \mathrm{PF})$,

P3a $\pi^i \Vdash \mathbf{F}p \Leftrightarrow \exists j \geq i. (\pi(j) \Vdash p) \quad (p \in \mathrm{SF})$,

P4a $\pi^i \Vdash \mathbf{X}p \Leftrightarrow \pi(i+1) \Vdash p \quad (p \in \mathrm{SF})$,

P5a $\pi^i \Vdash p\mathrm{U}q \Leftrightarrow \exists j \geq$
$i. [\pi(j) \Vdash q$ and $i \leq \forall k < j. (\pi(k) \Vdash p)] \quad (p, q \in \mathrm{SF})$.

CTL のすぐ分かる性質

1. Primitives は $\mathbf{AF}, \mathbf{EF}, \mathbf{AX}, \mathbf{EX}, \mathbf{AU}, \mathbf{EU}$ としてよい．
   - $\mathbf{F}, \mathbf{X}, \mathbf{U}$ のすぐ後に $\mathbf{A}, \mathbf{E}$ が付くから
2. さらに，primitives は $\mathbf{AX}, \mathbf{AU}, \mathbf{EU}$ としてよい．
   - $s \Vdash \mathbf{EX}p \Leftrightarrow s \Vdash \neg\mathbf{AX}\neg p$
   - $s \Vdash \mathbf{AF}p \Leftrightarrow s \Vdash \mathbf{A}(\mathrm{true}\mathbf{U}p)$
   - $s \Vdash \mathbf{EF}p \Leftrightarrow s \Vdash \mathbf{E}(\mathrm{true}\mathbf{U}p)$
   - $s \Vdash \mathbf{E}(p\mathbf{U}q) \Leftrightarrow s \Vdash \neg\mathbf{A}\neg(p\mathbf{U}q)$ but $\notin$ CTL-formula

CTL* の構文

定義 (CTL* の構文)

1. CTL* **の構文** := LTL **の構文** + CTL **の構文**
2. State formulas (SF) **のことを** CTL* **の論理式と呼ぶ.**
3. CTL* **の論理式の例**
   3.1 CTL **の論理式**,
   3.2 $\mathbf{A}p$ ($p \in$ LTL-fml),
   3.3 $\mathbf{A}\,(\mathbf{F}p \wedge \mathbf{F}q)$ ($\notin$ CTL-fml $\cup$ LTL-fml),
   3.4 $\neg\mathbf{A}\neg(p\mathbf{U}q)$ ($\notin$ CTL-fml $\cup$ LTL-fml).
4. **省略形 (同じ意味になる・する)**
   4.1 $\mathbf{G}p = \neg\mathbf{F}\neg p$, $(\mathbf{G}^{\infty}p = \neg\mathbf{F}^{\infty}\neg p)$,
   4.2 $\mathbf{A}p = \neg\mathbf{E}\neg p$, $\mathbf{F}p = \mathbf{true}\mathbf{U}p$, $(\mathbf{F}^{\infty}p = \mathbf{GF}p)$

CTL* の意味論

定義 (CTL* の意味論)

1. CTL* の意味論 := LTL の意味論 + CTL の意味論
2. Primitives は $\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{U}$ としてよい．
    2.1 $\mathbf{E}\boldsymbol{p} = \neg\mathbf{A}\neg\boldsymbol{p}$
    2.2 $\mathbf{F}\boldsymbol{p} = \mathbf{true}\mathbf{U}\boldsymbol{p}$

命題様相 μ 計算 (PMμ) の構文

定義 (PMμ **の構文**, Kozen’83)

Propositional Variables (PV, CTL* **にはない**)

S1 $p \in \mathrm{PC} \Rightarrow p \in \mathrm{SF}$,

S1’ $X \in \mathrm{PV} \Rightarrow X \in \mathrm{SF}$,

S2 $p, q \in \mathrm{SF} \Rightarrow \neg p,\ p \wedge q \in \mathrm{SF}$,

P4 $p \in \mathrm{SF} \Rightarrow \Box p\,(= \mathbf{AX}p),\ \Diamond p\,(= \mathbf{EX}p) \in \mathrm{SF}$,

Pμ $p \in \mathrm{SF}, X \in \mathrm{PV}, X$ is positive in $p \Rightarrow \mu X.p,\ \nu X.p \in \mathrm{SF}$.

PMμ の意味論

論理式の意味=その論理式が成り立つ状態全体のなす集合

定義 (PMμ の意味論)

S1 $[\![p]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := I(p) \quad (p \in \mathrm{PC})$

S1' $[\![X]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := V(X) \quad (X \in \mathrm{PV})$

S2 $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := S \setminus [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V}$, $[\![\varphi \land \psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} \cap [\![\psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V}$

P4 $[\![\Box\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := \{ s \in S \mid \forall s' \in S. sRs' \Rightarrow s' \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} \}$

Pμ $[\![\mu X.\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := \bigcap \{ \alpha \in \wp(S) \mid [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V[\alpha/X]} \subseteq \alpha \}$ (最小不動点)

CTL* と違い，PMμ には PV がある．
したがって，PMμ のモデルには，valuation V が必要になる．

PMμ のすぐ分かる性質など

1. 論理式の真偽 $s \Vdash_V \varphi \;\Leftrightarrow\; s \in [\![\varphi]\!]^S_V$
2. 省略形
   2.1 $\wedge, \exists$: いつもの省略形,
   2.2 $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$,
   2.3 $\nu X.\varphi := \neg\mu X.\neg\varphi[(\neg X)/X]$.
3. Primitives は $\Box, \mu$ とする.

表現力比較の方法

1. **論理式の真偽の定義 (再)**
   - CTL, CTL*, PMμ **の論理式は状態** s **に対し，真偽が決まる．**
   - LTL **の論理式はパス** π **に対し，真偽が決まる．**
   - **このふたつの種類の論理式をどう比較するか？**
2. **表現力の比較方法**
   - $\{\mathbf{A}p \mid p \in \text{LTL-fml}\}$ **と** CTL, CTL*, PMμ **の論理式を比較．**

表現力比較の結果 (1)

事実

- *CTL*, *LTL* $\leqq$ *CTL** (文法から明らか)
- *CTL* $\not\leqq$ *LTL* ($\because$ $\mathbf{EF}(p)$)
- *LTL* $\not\leqq$ *CTL* ($\because$ $\mathbf{A}(\mathbf{F}(p \wedge \mathbf{X}(p)))$)
- *LTL* $<$ *CTL** ($\because$ $\mathbf{E}[((p_1 \mathbf{U} p_2) \vee (q_1 \mathbf{U} q_2))\mathbf{U} r]$)
- *CTL* $<$ *CTL** ($\because$ $\mathbf{EGF}(p)$)

("Sometimes" and "Not Never" revisited: on branching versus linear time temporal logic, Emerson, Halpern, Journal of ACM, 1986)

表現力比較の結果 (2)

事実

- *CTL** $\leqq$ *PM*μ
  - $*$: *CTL** $\to$ *PM*μ *as follows:*
  - $\mathbf{A}(\psi_1 \mathbf{U} \psi_2)^* \mapsto \mu X.(\psi_2^* \vee (\psi_1^* \wedge \Box X))$.
- *CTL** $<$ *PM*μ
  - $\nu X.p \wedge \Box\Box X$ *is not equivalent to any formula of CTL**.

(e.g. Temporal Logic and State Systems, Kröger, Merz, Springer, 2008)

概論

命題時相論理の一階拡張 (first-order extensions)

- **命題様相 μ 計算** (PMμ) = PML + **不動点演算子** (μ, ν)
  - LTL, CTL, CTL* **等の命題時相論理を含む**
- **一階様相 μ 計算** (FOMμ) = PMμ + **量化記号** $(\forall, \exists)$
  - FOLTL, FOCTL, FOCTL* **等の命題時相論理の一階拡張を含む**

PMμ **のモデル検査を，** FOMμ **と類似の論理経由で実行するという研究も行われている．** (A linear translation from CTL* to the first-order modal μ-calculus, Cranen, Groote and Reniers, Theoretical Comptuer Science, 2011)

動機

事実

FOCTL の表現力 (パスに対する量化記号と要素に対する量化記号) があると，$\omega \times \omega$-再帰タイリング問題が記述できるなど，*CTL* と比べて表現力が極めて高くなる．*(Decidable fragments of first-order temporal logics, Wolter et al., Annals of Pure and Applied Logic, 2000)*

問題

このように，一階時相論理 (e.g. FOCTL) は，対応する命題時相論理 (e.g. CTL) と比較して，表現力が極めて高くなる．とすると，命題時相論理たちの間の表現力比較結果は，一階拡張しても保たれるのか？

Structure of FOTL (1)

定義

Let σ be a signature of FOTL.

1. A (σ-)*structure* is the quadruple $\mathcal{S} = \langle S, R, D, I \rangle$ where
    1.1 S is a non-empty set of states,
    1.2 R is a binary relation on S,
    1.3 D is a non-empty set and
    1.4 I is a function of the type $\mathrm{Pred}_n \times S \to \wp(D^n)$ for every $n \in \mathbb{N}$.
2. A *valuation* V in $\mathcal{S}$ is a function of the type
    2.1 $\mathrm{IV} \to D$ (for FOLTL, FOCTL, FOCTL*)
    2.2 $(\mathrm{PV} \to \wp(S)) \oplus (\mathrm{IV} \to D)$ (for FOMμ)

A structure of FOTL is the same as a structure of FOML, that is to say an extension of a Kripke frame $\langle S, R \rangle$ of PMμ in which a state s represents a first-order structure $\langle D, I(-, s) \rangle$.

Structure of FOTL (2)

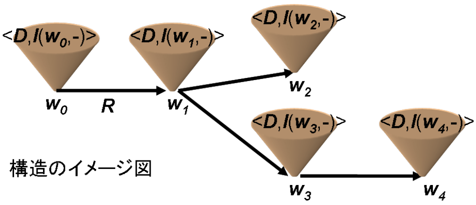
注意 (解釈の方針)

- 述語記号 p の解釈 I は可能世界 (状態) に依存する．
  - $I : \mathrm{Pred}_n \times S \to \wp(D^n)$
- 変数記号 x の解釈 V は可能世界に依存しない．
  - $V : \mathrm{IV} \to D$
- 解釈の方針は，モデル化対象に応じて決める．

Structure of FOTL (3)

例

- $S = \{ s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 \}$
- $R = \{ (s_0, s_1), (s_1, s_2), (s_1, s_3), (s_3, s_4) \}$
- D = ある集合
- I : Pred × $S \to D$ 上の述語



構造のイメージ図

FOLTL の構文

Predicates (Pred), Individual Variables (IV)

定義 (FOLTL の構文)

S1 $p \in \mathrm{Pred}, x \in \mathrm{IV} \Rightarrow p(x) \in \mathrm{SF}$,

P1 $\varphi \in \mathrm{SF} \Rightarrow \varphi \in \mathrm{PF}$,

P2 $\psi, \psi' \in \mathrm{PF} \Rightarrow \neg\psi, \psi \wedge \psi' \in \mathrm{PF}$,

P∀ $\psi \in \mathrm{PF}, x \in \mathrm{IV} \Rightarrow \forall x.\psi \in \mathrm{PF}$,

P3b $\psi \in \mathrm{PF} \Rightarrow \mathbf{F}\psi \in \mathrm{PF}$,

P4b $\psi \in \mathrm{PF} \Rightarrow \mathbf{X}\psi \in \mathrm{PF}$,

P5b $\psi, \psi' \in \mathrm{PF} \Rightarrow \psi\mathbf{U}\psi' \in \mathrm{PF}$.

Path formulas (PF) **のことを** FOLTL **の論理式と呼ぶ．**

FOLTL の意味論 (1)

定義 (FOLTL の意味論 (1))

S1 $s \Vdash_V p(x) \Leftrightarrow V(x) \in I(p, s) \quad (p \in \mathrm{PC})$,

P1 $\pi^i \Vdash_V \varphi \Leftrightarrow \pi(i) \Vdash_V \varphi$,

P2 $\pi \Vdash_V \neg\psi \Leftrightarrow \pi \nVdash_V \psi$,

P2' $\pi \Vdash_V \psi \wedge \psi' \Leftrightarrow \pi \Vdash_V \psi$ and $\pi \Vdash_V \psi'$,

P∀ $\pi \Vdash_V \forall x.\psi \Leftrightarrow \pi \Vdash_{V[d/x]} \psi$ for all $d \in D$,

P3b $\pi^i \Vdash_V \mathrm{F}\psi \Leftrightarrow \exists j \geq i. \left(\pi^j \Vdash_V \psi\right)\}$

P4b $\pi^i \Vdash_V \mathrm{X}\psi \Leftrightarrow \pi^{i+1} \Vdash_V \psi$

P5b $\pi^i \Vdash_V \varphi \mathrm{U} \varphi' \Leftrightarrow$
$\exists j \geq i. \left(\pi^j \Vdash_V \varphi'\right.$ and $\left. i \leq \forall k < j. \pi^k \Vdash_V \varphi\right)\}$

FOLTL の意味論 (2)

定義 (FOLTL の意味論 (2))

S1 $[\![p(x)]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := \{s \in S \mid V(x) \in I(p, s)\} \quad (p \in \mathrm{PC})$,

P1 $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := \{\pi \in \Pi \mid \pi(0) = s, s \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V}\}$,

P2 $[\![\neg\psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := \Pi \setminus [\![\psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V}$, $[\![\psi \wedge \psi']\!]^{\mathcal{S}}_{V} := [\![\psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} \cap [\![\psi']\!]^{\mathcal{S}}_{V}$,

P∀ $[\![\forall x.\psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := \bigcap_{d \in D} [\![\psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V[d/x]}$,

P3b $[\![\mathrm{F}\psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := \{\pi \in \Pi \mid \exists i \geq 0. \left(\pi^{i} \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V}\right)\}$,

P4b $[\![\mathrm{X}\psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := \{\pi \in \Pi \mid \pi^{1} \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V}\}$,

P5b $[\![\psi \mathrm{U} \psi']\!]^{\mathcal{S}}_{V} := \{\pi \in \Pi \mid$
$\exists j \geq 0. \left(\pi^{j} \in [\![\psi']\!]^{\mathcal{S}}_{V} \text{ and } 0 \leq \forall k < j. \pi^{k} \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V}\right)\}$.

FOCTL の構文

Predicates (Pred), Individual Variables (IV)

定義 (FOCTL の構文)

S1 $p \in \text{Pred}, x \in \text{IV} \Rightarrow p(x) \in \text{SF}$,

S2 $\varphi, \varphi' \in \text{SF} \Rightarrow \neg\varphi,\ \varphi \wedge \varphi' \in \text{SF}$,

S∀ $\varphi \in \text{SF}, x \in \text{IV} \Rightarrow \forall x.\varphi,\ \exists x.\varphi \in \text{SF}$

S3 $\psi \in \text{PF} \Rightarrow \mathbf{A}\psi,\ \mathbf{E}\psi \in \text{SF}$,

P3a $\varphi \in \text{SF} \Rightarrow \mathbf{F}\varphi \in \text{PF}$,

P4a $\varphi \in \text{SF} \Rightarrow \mathbf{X}\varphi \in \text{PF}$,

P5a $\varphi, \varphi' \in \text{SF} \Rightarrow \varphi\mathbf{U}\varphi' \in \text{PF}$.

State formulas (SF) **のことを** FOCTL **の論理式と呼ぶ．**

FOCTL の意味論 (1)

定義 (FOCTL の意味論 (1))

S1 $s \Vdash_V p(x) \;\Leftrightarrow\; V(x) \in I(p, s) \quad (p \in \mathrm{PC})$,

S2 $s \Vdash_V \neg\varphi \;\Leftrightarrow\; s \nVdash_V \varphi$,

S2' $s \Vdash_V \varphi \wedge \varphi' \;\Leftrightarrow\; s \Vdash_V \varphi$ and $s \Vdash_V \varphi'$,

S∀ $s \Vdash_V \forall x.\varphi \;\Leftrightarrow\; s \Vdash_{V[d/x]} \varphi$ for all $d \in D$,

S3 $s \Vdash_V \mathrm{A}\psi \;\Leftrightarrow\; \forall \pi \in \Pi.\ (\pi(0) = s \;\Rightarrow\; \pi \Vdash_V))\}$

P3a $\pi^i \Vdash_V \mathrm{F}\varphi \;\Leftrightarrow\; \exists j \geq i.\, (\pi(j) \Vdash_V \varphi))\}$

P4a $\pi^i \Vdash_V \mathrm{X}\varphi \;\Leftrightarrow\; \pi(i+1) \Vdash_V \varphi$

P5a $\pi^i \Vdash_V \varphi \mathrm{U} \varphi' \;\Leftrightarrow$
$\exists j \geq i.\ (\pi(j) \Vdash_V \varphi'$ and $i \leq \forall k < j.\pi(k) \Vdash_V \varphi))\}$

FOCTL の意味論 (2)

定義 (FOCTL の意味論 (2))

S1 $[\![p(x)]\!]_V^{\mathcal{S}} := \{s \in S \mid V(x) \in I(p, s)\} \quad (p \in \mathrm{PC}),$

S2 $[\![\neg\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}} := S \setminus [\![\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}}, [\![\varphi \wedge \varphi']\!]_V^{\mathcal{S}} := [\![\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}} \cap [\![\varphi']\!]_V^{\mathcal{S}},$

S∀ $[\![\forall x.\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}} := \bigcap_{d \in D} [\![\varphi]\!]_{V[d/x]}^{\mathcal{S}}$

S3 $[\![\mathrm{A}\psi]\!]_V^{\mathcal{S}} := \{s \in S \mid \forall \pi \in \Pi.\, \left(\pi(0) = s \Rightarrow \pi \in [\![\psi]\!]_V^{\mathcal{S}}\right)\}$

P3a $[\![\mathrm{F}\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}} := \{\pi \in \Pi \mid \exists i \geq 0.\, \left(\pi(i) \in [\![\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}}\right)\}$

P4a $[\![\mathrm{X}\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}} := \{\pi \in \Pi \mid \pi(1) \in [\![\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}}\}$

P5a $[\![\varphi \mathrm{U} \varphi']\!]_V^{\mathcal{S}} := \{\pi \in \Pi \mid$
$\exists j \geq 0.\, \left(\pi(j) \in [\![\varphi']\!]_V^{\mathcal{S}} \text{ and } 0 \leq \forall k < j.\, \pi(k) \in [\![\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}}\right)\}$

FOCTL* の構文と意味論

1. CTL* **のとき同様，**FOLTL + FOCTL **で構文・意味論を定義**
2. State formulas **のことを** FOCTL* **の論理式と呼ぶ**

FOMμ の構文

定義 (FOMμ の構文)

S1 $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Pred}, \boldsymbol{x} \in \mathrm{IV} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{SF}$,

S1' $\boldsymbol{X} \in \mathrm{PV} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{X} \in \mathrm{SF}$,

S2 $\varphi, \psi \in \mathrm{SF} \;\Rightarrow\; \neg\varphi,\; \varphi \wedge \psi \in \mathrm{SF}$,

S∀ $\varphi \in \mathrm{SF}, \boldsymbol{x} \in \mathrm{IV} \;\Rightarrow\; \forall \boldsymbol{x}.\varphi,\; \exists \boldsymbol{x}.\varphi \in \mathrm{SF}$,

P4 $\varphi \in \mathrm{SF} \;\Rightarrow\; \Box\varphi,\; \Diamond\varphi \in \mathrm{SF}$,

Pμ $\varphi \in \mathrm{SF}, \boldsymbol{X} \in \mathrm{PV}, \boldsymbol{X}$ is positive in $\varphi \;\Rightarrow\; \mu \boldsymbol{X}.\varphi,\; \nu \boldsymbol{X}.\varphi \in \mathrm{SF}$.

1. **いつもの省略形** $\vee, \exists, \Diamond, \nu$

FOMμ の意味論

定義 (FOMμ の意味論)

S1 $[\![p(x)]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := \{\, s \in S \mid V(x) \in I(P, s) \,\}$

S1’ $[\![X]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := V(X)$

S2 $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := S \setminus [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V}$, $[\![\varphi \wedge \psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} \cap [\![\psi]\!]^{\mathcal{S}}_{V}$

S∀ $[\![\forall x.\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := \bigcap\{\, [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V[d/x]} \mid d \in D \,\}$

P4 $[\![\Box\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := \{\, s \in S \mid \forall s' \in S. sRs' \Rightarrow s' \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} \,\}$

Pμ $[\![\mu X.\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V} := \bigcap\{\, \alpha \in \wp(S) \mid [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}_{V[\alpha/X]} \subseteq \alpha \,\}$ (最小不動点)

表現力比較の結果 (1)

命題

- $FOCTL, FOLTL \leqq FOCTL^*$ (文法から明らか)
- $FOCTL \not\leqq FOLTL$ ($\because$ $\mathbf{EF}(p(x))$)
- $FOLTL \not\leqq FOCTL$ ($\because$ $\mathbf{A}(\mathbf{F}(p(x) \wedge \mathbf{X}(p(x))))$)
- $FOLTL < FOCTL^*$
  ($\because$ $\mathbf{E}[((p_1(x)\mathbf{U}p_2(x)) \vee (q_1(x)\mathbf{U}q_2(x)))\mathbf{U}r(x)]$)
- $FOCTL < FOCTL^*$ ($\because$ $\mathbf{EGF}(p(x))$)

表現力比較の結果 (2)

命題

FOCTL* $<$ *FOM*μ

- *FOCTL** $\leqq$ *FOM*μ
  - $*:$ *FOCTL** $\to$ *FOM*μ *as follows:*
  - $\mathbf{A}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2)^* \mapsto \mu X.(\varphi_2^* \vee (\varphi_1^* \wedge \Box X))$.
- *FOCTL** $\neq$ *FOM*μ
  - $\nu X.p(x) \wedge \Box\Box X$ *is not equivalent to any formula of FOCTL**.

命題時相論理のときの証明 (論理式の構成に関する帰納法) を，一階時相論理版に拡張する．付置 V 以外の $V[d_1/x_1]\cdots[d_n/x_n]$ に対しても，同時に帰納法を回す必要がある．

表現力比較の結果 (3)

命題

$\mathit{FOLTL} \not\leq \mathit{FOCTL} \quad (\because \mathbf{EF}\,p(x))$

1. $\exists\varphi \in$FOLTL s.t. $\mathbf{A}\varphi \equiv \mathbf{EF}\,p(x)$ とする．
2. $\langle S, R\rangle$ ($\langle S', R'\rangle$) のパス全体を Π (resp. Π') とする．
3. このとき，$\langle S, R, D, I, V\rangle \Vdash \mathbf{A}\varphi$ かつ $\Pi' \subseteq \Pi$ であれば，$\langle S', R', D, I{\restriction}S', V{\restriction}S'\rangle \Vdash \mathbf{A}\varphi$ となる．($\star$)
4. $\langle S, R\rangle, \langle S', R'\rangle$ をうまく構成すると，$\mathbf{EF}\,p(x)$ が前者で成立つ証拠となるパスを，後者から取り除くことができる．
5. しかし，これは ($\star$) と矛盾．

表現力比較の結果 (4)

命題

$FOCTL \not\leq FOLTL \quad (\because \mathbf{A}(\mathbf{F}(p(x) \wedge \mathbf{X}p(x))))$

$\langle S_i, R_i, D_i, I_i\rangle$ と $\langle S'_i, R'_i, D_i, I'_i\rangle$ の列をうまく構成すると，

1. $\langle S_i, R_i, D_i, I_i\rangle, a_i \Vdash_V \mathbf{A}(\mathbf{F}(p(x) \wedge \mathbf{X}p(x)))$
2. $\langle S'_i, R'_i, D_i, I'_i\rangle, a_i \Vdash_V \neg\mathbf{A}(\mathbf{F}(p(x) \wedge \mathbf{X}p(x)))$
3. $\forall\varphi \in \mathrm{FOCTL}, |\varphi| \leq i \Rightarrow$
   $(\langle S_i, R_i, D_i, I_i\rangle, a_i \Vdash_V \varphi \Leftrightarrow \langle S'_i, R'_i, D_i, I'_i\rangle, a_i \Vdash_V \varphi)$

ここで，$\mathbf{A}(\mathbf{F}(p(x) \wedge \mathbf{X}p(x))) \equiv \varphi$ for some FOCTL-formula φ であるとする．このとき，(3) から，
$\langle S_i, R_i, D_i, I_i\rangle, a_i \Vdash_V \mathbf{A}(\mathbf{F}(p(x) \wedge \mathbf{X}P(x))) \Leftrightarrow \langle S'_i, R'_i, D_i, I'_i\rangle, a_i \Vdash_V \mathbf{A}(\mathbf{F}(p(x) \wedge \mathbf{X}p(x)))$
となり，(1) と (2) に矛盾．

まとめ

命題

命題時相論理の表現力比較結果は一階拡張しても保たれた

課題

1. 表現力比較の証拠となる論理式が PTL の論理式なら持ち上げられる (はず)
2. 時相演算子と量化記号が絡み合う面白い論理式を探す