巨大基数を保存する強制法

9 月 25 日のお茶会にて、宇佐美康之さんの講義が本稿の内容です。原田真が ノートを取りました。

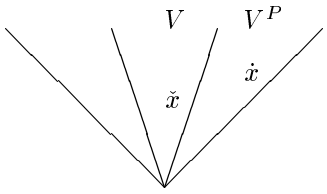
講義の内容は、いくつかの巨大基数 (inaccessible,measurable,strongly compact,γ-strong,Woodin) について、V で成立することと、P(p.o.set) による V の拡大で force されることが同値となるための P の条件についてのものでした。拡大の定義と、V で成立することと、拡大で force されることと同値となるような formula の簡単な例をあげて、これらの巨大基数では、どのような条件であるかを考える。

・P による V の拡大 V^P とは次のように inductive に定義される。

$V_0^P = \emptyset, V_{\alpha+1}^P = \wp(V_\alpha^P \times P)$

$V_\gamma^P = \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha^P$

$V^P = \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha^P$



(図での $\check{x}, \dot{x}$ というのは、V^P での元であるという表記で、$\check{x}$ の方は V の元でもあるという意味。総じて $P-name$ と呼ばれている。)

・V で成立していることと、V^P で force されていることが同値となるような簡単な例としては次のようなことがある。

$\varphi(x) : \Delta_0 - formula$ とするならば、どのような P であっても、
$V \models \varphi(x) \Longleftrightarrow \Vdash -\varphi(\dot{x})$
が常にいえる。

・本題に入って、巨大基数の場合において、以下のことがわかっている。

inaccessible に関しては $P : \kappa.c.c(\kappa\ chain\ condition)$ の条件があれば、拡大に関して保存される。すなわち、

$$V \models \kappa : inaccessible \Longleftrightarrow \Vdash -\check{\kappa} : inaccessible$$

また、それ以外の巨大基数 (measurable,strongly compact,γ-strong,Woodin) に関しては $|P| < \kappa$ がいえていれば拡大に関して保存される。

(Levy-Solovey IJM67,Hankins-Woodin 2000,Preceedings of the AMS vol10)