数理論理学 I

April 22, 2002

1 準備

集合に関するごく基礎的な知識は仮定する．特に，以下に述べる事項は重要である．

- a が集合 A の要素（元）であることを，$a \in A$ とかく．要素のない集合を $\emptyset$ であらわす.
- $A \subset B \iff$ 集合 A に属する元はすべて B に属する (A は B の部分集合).
- $A \cup B$: 集合 A と B の和集合.
- $A \cap B$: 集合 A と B の共通部分.
- $\mathcal{P}(A)$: 集合 A のべき集合（$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$.）
- 集合族 $\mathcal{A}$ に対して，$\bigcup \mathcal{A} = \{x : x \in X \text{ (for some } X \in \mathcal{A})\}$，$\bigcap \mathcal{A} = \{x : x \in X \text{ (for all } X \in \mathcal{A})\}$．特に $\mathcal{A} = \{X_i : i \in I\}$ と書かれている場合は，$\bigcup \mathcal{A}$ を $\bigcup_{i \in I} X_i$ と書くことが多い.
- $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. $A^2 = A \times A$, $A^3 = (A^2) \times A$,...

この講義では，自然数全体を $\mathbb{N}$, 整数全体を $\mathbb{Z}$, 有理数全体を $\mathbb{Q}$, 実数全体を $\mathbb{R}$, 複素数全体は $\mathbb{C}$ であらわす．何も言わなければ，自然数は 0 から始まるものとする.（後に $\mathbb{N}$ を ω であらわすこともある.）

Exercise 1 *1.* A を n 個の元からなる有限集合とする．A^m, $\mathcal{P}(A)$ はそれぞれ何個の点からなるか.

2. n 次多項式の全体を X_n として，$A = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ とする．$\bigcup A$, $\bigcap A$ はそれぞれどんな集合になるか.

Definition 2 1. （専門家には怒られそうですが）基数とは集合の元の個数（濃度）を表す指標のことである．集合 A の濃度は $|A|$，card$A$ などで表す．集合 A と集合 B の間に全単射が存在すれば，A と B は同じ濃度を持つ．自然数の集合 $\mathbb{N}$ と同じ濃度を持つ集合を可算集合という.（注意：可算または有限のことを単に可算という人もいる.）

2. 無限の基数を小さい方から番号づけして，$\aleph_0$, $\aleph_1$,... とかく．可算集合に対応する基数は $\aleph_0$ である．

Exercise 3 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ のうち，可算集合はどれか.

対角線論法により次がわかる.

Theorem 4 集合 A のべき集合 $\mathcal{A}(A)$ の濃度は A の濃度より真に大きい.（$|A| < |\mathcal{P}(A)|$.）

また可算集合に関する次の定理は重要である.

Theorem 5 可算集合 A に対して，A^2, ..., A^n,..., $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ はすべて可算集合になる．このことは，A の元からなる有限列全体が再び可算になることを示す.

Exercise 6 $\mathbb{Q}$-係数の多項式 $f(x)$ の全体は可算集合になることを示せ.

Definition 7 $\kappa = |A|$, $\lambda = |B|$（ただし $A \cap B = \emptyset$）とする．このとき，

1. $A \cup B$ の濃度を $\kappa + \lambda$ であらわす.
2. $A \times B$ の濃度を $\kappa \cdot \lambda$ であらわす.
3. $\mathcal{P}(A)$ の濃度を 2^κ であらわす.

Theorem 8 κ または λ のいずれかが無限ならば，

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

2　数学的に表現する練習

論理記号を単なる記号と考え，記号から連想される「直観」を排除することも後に行う．その場合，記号の「意味」は公理と推論規則で与えるようになる．このことは，例えば微積分で「関数が連続」という概念を厳密に ε - δ で定義して，その定義だけを使って（直観を排して）議論をしてゆくことと似ている．

しかし，ここでは軽い気持ちで，記号を使って表現してみましょう．慣れることも大切です．最初に出てくる記号は：

1. $\neg$ ：「否定」を意味する記号
2. $\wedge$: 「かつ」を意味する記号
3. $\vee$:「または」を意味する記号
4. $\rightarrow$:「ならば」を意味する記号.

次に（基本的な）命題を表現する記号として，P, Q, P_1, P_2,... などを与えます．これらの命題を使ってより複雑な命題を表す練習をしましょう．P が日本語の「風が吹く」を表し，Q が「桶屋が儲かる」を表しているとしましょう．このとき例えば,「風が吹かない」は

$$\neg P$$

で表現されます．また,「風が吹くならば桶屋が儲かる」は

$$P \rightarrow Q$$

で表現されます.

Exercise 9 「風は吹くし，桶屋も儲かる」「桶屋が儲かれば風が吹く」「桶屋が儲からないかまたは風が吹かない」を P, Q と論理記号を使って表せ.

もう少し一般に，論理式という概念を定義しましょう．以下でしばらく扱うのは正確には命題論理の論理式というものです．まず，基本的な命題を表す命題変数の集合

$$P, Q, P_1, Q_1, \ldots.$$

を一つ与えます．これをもとに次の定義をしましょう.

Definition 10 （命題論理の論理式）

1. 命題変数はすべて論理式である．

2. φ, ψ が論理式ならば，

$$\neg(\varphi), (\varphi) \wedge (\psi), (\varphi) \vee (\psi), (\varphi) \to (\psi)$$

はすべて論理式である．

3. 以上の *1,2* の繰り返しによって論理式とわかるものだけが論理式である．

例えば，P,Q は命題変数なので，1 により論理式とわかります．次に 2 を使うと，$\neg(P)$ や $(P) \vee (Q)$ も論理式とわかります．このことにさらに 2 を使うと $(\neg(P)) \to ((P) \vee (Q))$ も論理式とわかります．

Exercise 11 *1.* $((P) \to (Q)) \to ((P) \wedge (\neg(P) \vee (Q)))$ は論理式になることを確かめよ．

2. $(P) \wedge (PQ)$ は論理式にならないことを示せ．

Remark 12 論理式において，以上では括弧を多用したが，適当に省略した方が見やすい場合もある．例えば，$(P) \vee (Q)$ は誤解のない範囲で $P \vee Q$ とかく．

我々は，個々の命題の真偽は決定されているという立場をとる．(最初に例に出した「風が吹く」という日本語は場所や時間によって真偽が変わってくるが，それでも「何月何日の何時に＊＊で風速＊＊メートル以上の風が吹く」と具体的に記述すれば，嘘か本当かは判断できる（と思う）.）我々が考えている命題は「数学的な命題」であるから，真偽が決定されていると考えるのはそれほど不自然ではない．より基本的な命題の真偽からより複雑な命題の真偽が決まってくる．通常以下のように考える．

φ, ψ を論理式としたとき，これらから作られる論理式の真偽は

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \to \psi$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

で与えられる．ただし，T は真，F は偽を表している．