数理論理学I

May 13, 2002

1　任意と適当

今回も形式的な話からは離れて，記号を使って表現する練習です.

「適当に選んどいて」と言われたらどうしますか？

- 自由に選んでいいのだから，見ないで選ぶ.
- どれがふさわしいかを良く考えて選ぶ.

人間的にどちらが良いかは別にしても，言われた日本語を忠実に実行するとすれば後者の行動をとらなければいけません.「適当」ということばは「勝手」とか「自由」という言葉とは違います.

Exercise 1 次のうち正しいのはどれか？

1. 適当な x に対して $x+3=2$.
2. 適当に選んだ x に対して，$x+3=2$;
3. どんな x に対しても y を自由に選んで，$x+y\geq 0$;
4. どんな x に対しても y を適当に選んで，$x+y\geq 0$.

数学では,「適当に選んだ x に対して...」,「上手に x を選べば...」,「x が存在して...」，などは同じ意味になります．これらは，記号で

$$(\exists x)\ldots$$

と書きます．また集合 M の中に x が存在することは,「$(\exists x \in M)...$」とかきます．これに対して,「自由に」の意味の同義語としては,「任意の」,「すべての」などがあります.「任意の x に対して...」は記号で

$$(\forall x)...$$

と書きます．これらも論理記号といいます（前回習ったのは，$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$）．特に，$\forall$ を全称記号，$\exists$ を存在記号といいます.

Exercise 2 $F(x, y)$ を「x は y を知っている」を表すとする．次の文章を論理記号 $\forall, \exists$ を用いてかけ：

1. x は y を知っているが，y は x を知らない.
2. x さんには知り合いがいる.
3. どんな人にも知り合いはいる.
4. x さんの知り合いの知り合いだけれども，直接 x さんが知らない人がいます.

Exercise 3 集合の包含関係とのかかわりについて調べよう．二つの条件 $P(x)$，$Q(x)$ に対して，M の部分集合 $A_P = \{x \in M : P(x)\}$,$A_Q = \{x \in M : Q(x)\}$ を考える．このとき，

$$A_P \subset A_Q$$

は

$$(\forall x \in M)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

と同値である．では，

1. 「A_P が空集合である」という文章は $P(x)$ を使った論理式で，どう表現されるか.
2. 「A_P と A_Q に共通部分がない」というのはどう表現されるか.

Exercise 4 1. $\forall x A(x)$ と $\neg(\exists x(\neg A(x)))$ は同値になることを説明せよ.

2. $\exists x A(x)$ と $\neg(\forall x(\neg A(x)))$ は同値になることを説明せよ.

2 目標

今までは，数学にあらわれる文章を，より簡単な文章から出発して，論理記号を使うことで表現してきた．これらの文章には大きく分けて二つの種類があり，一つは「命題論理の論理式」に対応するもので，それは論理記号として $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ だけを許すものである．一方，より複雑な「述語論理の論理式」に対応する文章は論理記号として更に $\forall$,$\exists$ を許すものである．

Example 5 （自然数の世界で考える）x が y を割り切るという文章を $D(x,y)$ で表現するとき，例えば,「x は偶数」は $D(x,2)$；「x は素数」は $x \neq 1 \wedge (\forall y(D(y,x) \rightarrow (y=1 \vee y=x)))$ で表現される．

我々は論理記号の意味を知っているし，命題が成り立つかどうかは推論を続けることによって判断できると信じている（かな？）．では,

(*) 機械に論理記号の意味を教え，推論させて数学の定理を証明させることはできるだろうか.

もちろん,「意味」,「理解」,「推論」などの意味が何かを正確に書かないと答えられはしない．おおまかに言うと,

(**) あの意味では可能だけど，あっちの意味では不可能となる．

可能なことを主張するのが「完全性定理」であり，不可能なことを主張するのが「不完全性定理」である．数学は完全だけど不完全だという禅問答の世界の主張ではない．完全の対象と不完全の対象が異なるのだから，何の問題もない．完全性は論理の完全性であり，不完全性は理論の不完全性である．(国語辞典を使って両者の違いを調べてみましょう．ただし，読んでもたぶん違いが分からないと思います．分かるようになる一番の近道はこの講義を最後まで聞くことです.)

この講義での目標は，完全性定理を示すことである．そのためには,

- 論理式を正確に定義する．
- だれもが認める「（論理の）公理」を提示する．
- だれもが認める「推論」を提示する．
- 「公理」から始まって「推論」を何回か使って出てくる論理式を証明できる論理式（命題）という.

- 正しい命題（すなわち反例の存在しない命題）は必ず証明できることを示す.
- それは我々の「論理」が完全なことを主張している.

言葉で説明すると上のようになるが，これらは正確に書くとかなり大変なことである．実際，上のすべてを実行するのに来学期まで使う必要がある.

3　言語