数論セミナー

日時: 2026 年 2 月 20 日 (金) 16:40〜
場所: D814 (+Teams)
講演：武井由智 (独立研究者)
講演題目: 一般化 Farey 数列の木とある単純な再帰関係で定義される木の同型について

アブストラクト:

Farey 数列を僅かに一般化したある数列から自然に定義される木と, ある単純な再帰関係で定義される木が同型であることを報告する. 以下において自然数 N に対する $[N]$ は集合 $\{1,\ldots,N\}$ を意味し, $[0]$ は空集合を意味する.

非負整数 m,n に対し, (Farey 数列を僅かに一般化した) 分子が $[m]$ に, 分母が $[n]$ に属する有理数および 2 元 $0,\infty$ を昇順に並べた数列 $\mathrm{G}^{\mathrm{seq}}_{m,n}$ を考える. この $\mathrm{G}^{\mathrm{seq}}_{m,n}$ の各隣接 2 項 $a<b$ に対する開区間 (a,b) にインデクス m,n を付した $((a,b);m,n)$ のなす集合を $\mathcal{G}_{m,n}$ とし, さらに与えられた非負整数 k に対して $k=m+n$ を満たす $\mathcal{G}_{m,n}$ の合併を $\breve{\mathcal{G}}_k$ とおく. すると, $((0,\infty);0,0)\in\breve{\mathcal{G}}_0$ を根とし, 深さ k の頂点の集合が $\breve{\mathcal{G}}_k$ であり, 頂点 $((a,b);m,n)\in\breve{\mathcal{G}}_k$ は「$b'=\min(b,(m+1)/n), a'=\max(a,m/(n+1))$ に対し, $a<b'$ ならば $((a,b');m+1,n)\in\breve{\mathcal{G}}_{k+1}$ を子に持ち, $a'<b$ ならば $((a',b);m,n+1)\in\breve{\mathcal{G}}_{k+1}$ を子に持つ」という 2 分木を定義することができる.

他方, $(1,1;1,1)$ を根とし, 深さ k の頂点は $m+n=k+2$ である自然数 m,n と $s,t\in[mn]$ に対して $(s,t;m,n)$ の形であり, 頂点 $(s,t;m,n)$ は $s-t>-n$ のとき $(s+n,t;m+1,n)$ なる子を持ち $s-t<m$ のとき $(s,t+m;m,n+1)$ なる子を持つという, 単純な再帰関係から形成される 2 分木を別途考えることができる.

本報告は異なる方法で定義されたこの 2 つの木の同型について解説する.

なお, 2024 年 7 月 12 日の本セミナーにおいて, 標準的 Farey 区間がなす木と, ある漸化合同式を満たす置換のなす純組み合せ論的木が同型であることを報告したが, その同型性 は Surányi (1958) による全単射から誘導されたものである. 本報告は (講演者が「もうひとつの Surányi の全単射」と呼んでいる全単射に対する) 前回の報告の類似物と捉えることもできる.

本講演の内容は永田誠氏 (大阪医科薬科大学薬学部) との共同研究である.

世話人: 秋山茂樹 (内: 4395)