

数の Pisot 表現と田村の無限積

Shigeki Akiyama

97/5/26

1 Introduction

実数 $\beta > 1$ を固定する。任意の正な実数 x を

$$x = \sum_{N_0 \leq i}^{\infty} a_i \beta^{-i} \quad (1)$$

の形に表す事を考える。そのもっとも容易な方法はいわゆる「強欲算法」によるものだろう。すなわち $x = x_0 > \beta^k$ なる最大の整数 $k = N_0$ を選び

$$x = a_k \beta^k + x_1, \quad a_k = [x/\beta^k]$$

で x_1 を定め次に x_1 に対して同様な操作を繰り返すのである。ここで $[x]$ は x の整数部分を表す。すると (1) は次のような関係を満たす。

$$\forall N \quad |x - \sum_{N_0 \leq i \leq N} a_i \beta^{-i}| < \beta^{-N}. \quad (2)$$

もちろん逆にこの条件を満たせば上記の強欲算法によってこの展開は得られる。本稿ではこの展開を x の β -greedy expansion と呼ぶ。 β が整数の場合にはこのような展開は通常の 2 進法や十進法にあたるものである。本稿で問題にしたいのは β が有理整数でない場合である。筆者はある種の Diophantus 近似の問題を考えているうちに、このような一風変わった数表現についても様々な興味深い現象があることに気がついた。このような数表現にも様々な数学的構造があり、具体的な整数論の問題にも応用しうるのである。本稿ではこのような事柄についての最近の二つのトピックを紹介する。

1. Pisot 表現の有限性、周期性、純周期性に関する基本的な事柄。とくに純周期性に関する予想とこれまでに分かった事実の紹介。
2. 田村氏によって発見されたある種の新しいタイプの無限積の係数の有限性の Pisot 表現による別証明。および Pisot 表現の立場からのこの現象の解釈。

2 Pisot 表現の有限性と周期性

代数的整数 $\beta > 1$ が Pisot 数であるとは、その β 自身以外のガロア共役の絶対値が 1 より小なときにいう。また代数的整数 $\beta > 1$ が Salem 数であるとは β 自身以外の共役の絶対値が 1 以下で少なくとも一つの共役の絶対値が 1 と等しいものをいう。すると次がなりたつ。

定理 (A.Bertran [3], K. Schmidt [7])

β を Pisot 数とする。正の実数 x の β -greedy expansion が周期的であるための必要十分条件は $x \in \mathbf{Q}(\beta)$ である。

ここで x の β -greedy expansion が周期的とはある整数 $M > 0$ が存在して十分大きい n に対して $a_n = a_{n+M}$ が成立する事をいう。さらに「十分大きい n 」でなく「全ての n 」で $a_n = a_{n+M}$ が成立するなら純周期的という事にする。

この結果は実数の Pisot 表現は十進法や二進法と類似の展開であることを意味している。証明は易しいが、発見するのは難しい事柄ではないかと思う。さらにおもしろい事に

定理 (K.Schmidt [7])

$\beta > 1$ を任意の実数とする。区間 $[0,1)$ の全ての有理数の β -greedy expansion が周期的ならば β は Pisot 数または Salem 数である。

が成り立つ。K.Schmidt は同じ論文で Salem 数についても $\mathbf{Q}(\beta)$ の任意の元の β -greedy expansion は周期的だろうと予想している。この問題にかんしては D.W.Boyd は [4] で興味深い確率的な議論を展開して予想に関して否定的な見解を述べている。私の見解もほぼ彼のものと一致する。私はこの Salem 数に関する K.Schmidt の予想は 4 次限定すれば正しいと思う。私なりの発見的な議論もあるのだがこれは別稿に譲る。

最初にこの β -greedy expansion の有限性、周期性、純周期性についていくつかの基礎的な結果を述べたい。(これらの結果は [1] に掲載予定のものの部分的紹介である。)

β を任意の実数とし、次のような性質を考える。

全ての正な $x \in \mathbf{Z}[\beta]$ は有限な β -greedy expansion をもつ。 (3)

この有限条件が成り立つならば β は Pisot 数であることが [5] により知られている。([5] 補題 1 の証明) また同 [5] では β がこの有限条件を持つためのよい十分条件がいくつか与えられている。たとえば β の最小多項式が

$$x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \cdots - a_0$$

であって $a_i \in \mathbf{Z}_{>0}$ かつ $a_i \geq a_{i-1}$ が成り立つとき β は Pisot 数であり有限条件 (3) を満たす。

これらは大変興味深い結果であるが有限条件 (3) を満たす Pisot 数は他にも多くある。我々は具体的に Pisot 数 β が与えられたとき有限条件 (3) を満たすか否かの決定をするためのアルゴリズムを与えたい。

定理 1

k 次の Pisot 数 β が有限条件 (3) を持つための必要十分条件は有限集合

$$\left\{ x \in \mathbf{Z}[\beta] \mid 0 < x \leq 1, |x^{(j)}| \leq \frac{[\beta]}{1 - |\beta^{(j)}|} \quad j = 1, \dots, k-1 \right\}$$

の元の β -greedy expansion が有限であることである。ここで $x^{(0)} = x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}$ は x のガロア共役を表す。

さて β が一般の代数的数の場合を考える。展開が非周期的であることを示すのは難しくない場合が多い。一つだけ結果を紹介しよう。

命題

代数的数 $\beta > 1$ にある共役 $\beta^{(j)}$ が存在して $|\beta^{(j)}| \geq \beta$ が成立し $\beta^{(j)}/\beta$ が 1 の巾根でないとする。このとき開区間 $(0,1)$ の全ての有理数の β -greedy expansion は周期的でない。

この証明は β -greedy expansion が周期的ならば β に関する有理関数として捉えられるので両辺のガロア共役の作用をみれば得られる。この方針で具体的に β が与えられればある実数の展開が周期的か否かはほぼ決定できることも分かる。

以下 [1] の主定理を紹介しようと思うがその前に動機を書く。十進法やでは開区間 $(0,1)$ の有理数を小数展開したとき分母が 10 と互いに素ならば循環小数は純周期的である。したがってこの類似が Pisot 表現で成立するか否かは興味深い問題である。私は次の予想を立てた。

予想

Pisot 数 β が有限条件 (3) を満たしているとする。このときある正数 c が存在して開区間 $(0, c)$ の有理数はその分母が β と互いに素ならば純周期的な β -greedy expansion をもつ。

ここで「互いに素」というのは分数イデアルの意味である。

K.Schmidt は [7] のなかで 2 次の Pisot 単数で Norm が -1 のものは $c = 1$ でこの予想を満たすことを証明している。実は [1] に詳しく書いてあるが Norm が正の場合には予想を満たす c は存在しない。さらにこの場合 Norm の正負は有限条件

(3) を満たすかどうかとぴったり対応している。従って予想から有限条件の部分を取り除く事はできない。

さて [1] の主定理は予想が β が Pisot 単数すなわち、Pisot であって代数体の整数環の単数でもあるときには正しい事を主張する。すなわち

定理 2

β を Pisot 単数とする。このとき β が有限条件 (3) を満たすならばある正数 c が存在して开区間 $(0, c)$ の有理数の β -greedy expansion は純周期的である。

[1] の主定理の証明の本質は次の補題の形でも述べることができる。

補題

$\beta > 1$ を k 次の代数的数とする。集合 $X(p)$ を $x = \sum_{i=0}^p a_i \beta^{-i}$ なる greedy expansion で $a_p \neq 0$ となるもの全体とするとき

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \min_{x \in X(p)} \max_{j=1, \dots, k-1} \left| \sum_{i=0}^p a_i (\beta^{(j)})^{-i} \right| = \infty$$

さて定理 2 は正数 c の存在を示しているが詳しくその証明をみると c の具体的な構成法も与えていることがわかる。具体的な場合の c の上限 $\sup c$ を決定するのは大変興味深い問題だろうと思われる。

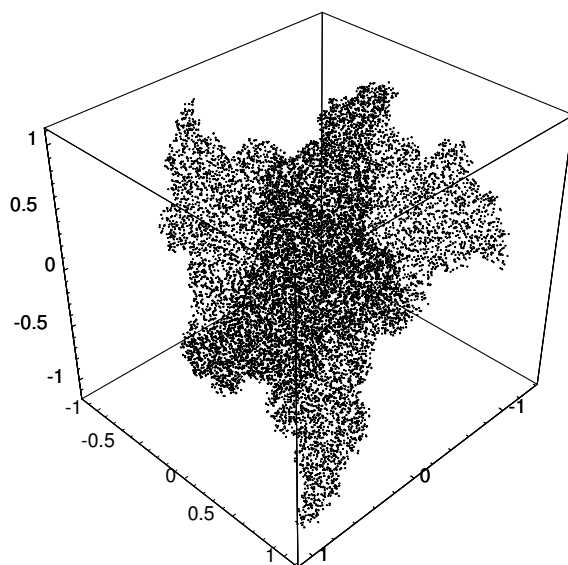
例

$x^3 - x - 1$ を最小多項式とする Pisot 単数は (3) を満たすことが定理 1 で示せる。実はこれが最小の Pisot 数であることが Siegel により知られている。(cf. [2]) この場合 $0.4342 \leq \sup c \leq 0.6924$ が [1] で示してあるがさらに計算を続けると $\sup c = 2/3$ ではないかと想像される。

これに関連して [6] は 2 次 Pisot 単数の場合に整数環のなかで純周期的な元の全体を完全に決定した。この場合には $\sup c = 1$ または $\sup c = 0$ となることは上述したが、純周期的な元の集合の閉包は Minkowski 型の埋め込みにより長方形二つを結合させた形となる。彼らの方法は greedy expansion のアルゴリズムを $\mathbf{R}^2$ の中に実現してその基本領域にあたる 'natural extension' と呼ばれるものを具体的に構成することにある。

当然、次は 3 次の場合に興味広がるのだが、たとえば $x^3 - x - 1$ という最小多項式に対応してできる Pisot 数の場合にはヒトデのような 3 次元立体となる事が観察できる。

最近になって定理 2 と補題は Thurston による平面のフラクタルタイル (cf. [9]) による充填問題へ重要な応用があることが熊本県立大の貞広氏との共同の仕事でわかってきた。



実はこの Thurston の問題はこの greedy expansion の 実 3 次元の natural extension を 2 次元へ射影したものとなっている。すなわち上述のヒトデを 2 次元へ射影したものが Thurston によるフラクタルタイルそのものである！

定理 2 から Thurston のフラクタルタイルに内点があるという基本的事実を示すことができ、補題は境界の決定に役立つのである。

3 田村の無限積と整数の Pisot 表現

自然数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = k(a_{n-1} + \cdots + a_{n-m+1}) + la_{n-m} \quad (4)$$

という $m+1$ 項間漸化式で定める。但し k, l は自然数で $k \geq l$ 。また

$$k \sum_{i=1}^r a_i < a_{i+1} \quad (r = 1, 2, \dots, m-1)$$

とする。

昨年、国際短大の田村氏はある種の無限積の真に驚くべきある種の有限性を証明した。その一部分を述べれば

定理 (J.Tamura [8]) m を偶数とし、 $k = l = 1$ の場合を考える。このとき

$$\prod_{n \geq 1} (1 - z^{a_n}) = \sum_{i \geq 0} b_i z^i$$

において

1. $b_i = 0, 1, -1$ のいずれかである。
2. $b_i = 0$ となる i の上極限密度は 1 である。
3. 無限ワード $b_0b_1b_2\dots$ は有限ワードの再帰的な結合によって具体的に作り出される！

田村氏の証明には、3. の驚くべき再帰的結合公式が本質的である。また [8] には他にも 1 の 6 乗根を Laurent 係数にもつ無限積なども扱われている。本稿の目的は、この再帰的結合公式に代えて整数の Pisot 表現を考えるとこの現象の定性的な事柄はかなり把握できるという事を紹介することにある。

ここで整数の Pisot 表現とは次の意味である。

$$x^m - c_{m-1}x^{m-1} - \dots - c_1x - c_0$$

を Pisot 数 β の最小多項式とする。このときこの最小多項式を特性方程式とする $k+1$ 項間漸化式により整数列 a_n を定義する。このとき適当な整数 x を a_n の和によって表すことを考える。すると §1 同様の greedy expansion が可能である。この表現を greedy Pisot 表現とよぶ。たとえば整数を Fibonacci 数の和で表す事などを考えられよ。

ただし一般に整数を与えると常に greedy Pisot 表現の意味で a_n の和で表せるとは限らない。適当な初期条件を与えれば全ての整数の表現が可能になるがこれは以下の議論には無関係である。

(4) の場合 $c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = k, c_0 = l$ であり [5] の結果により対応する最小多項式は Pisot 数を定義する事に注意する。

以下ページ数の制限もあるので証明にはほとんど触れられないがそのアイデアは無限積の係数を (4) による greedy Pisot 表現によって翻訳しその性質を詳しく調べる事にある。

さて R を整域。 K を R の商体とする。 R 上の多項式環 $R[z]$ の元 $P(z)$ で次数が k 以下で定数項が 1 であるものを考える。

$$\prod_{n \geq 1} P(z^{a_n}) = \sum_{i \geq 0} b_i z^i$$

で $b_i \in R$ を定める。すると

定理 3

集合 $\{b_i\}$ は R の中で乗法的な半群となる。

この証明には二つの鍵がある。まず自然数の greedy Pisot 表現を考えると一つの自然数の表現の全体は substitution による順序によって directed ordered set にな

ることが第一点。この事を保証するためには (4) の形の最小多項式をもつ Pisot 表現でなければならない事もわかる。二番目は自然数 m の greedy word w から b_m を決定する関数 $S(w)$ を具体的に書いたとき word w が適当な条件下で $w = w_1 \oplus w_2$ と二つに切断されて

$$S(w) = S(w_1)S(w_2)$$

という乗法性を持つことである。ここで $\oplus$ は word の結合を表す。

さらに次が示される。

定理 4

もしも greedy Pisot 表現できる自然数 i が存在して $b_i = 0$ となるならば数列 $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ に於ける 0 の自然密度は 1 である。すなわち

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{i \leq N \mid b_i = 0\}}{N} = 1$$

この証明はかなり複雑である。概略はつぎの通り。定理 3 の証明における「乗法性」により一つでも 0 があればその 0 密度の下極限は正である。更に定理 3 の意味で切断されない word は全体から見て密度 0 である事をしめせるので word の中央付近で切断されるものだけ考えればよい。そこで切断される位置に関してうまく disjoint に分類し切断された左右での 0 密度の下極限を考えると下極限間のある種の不等式が得られ、これを二重に利用することで 0 密度の下極限が 1 であることが得られる。

さて以降、Laurent 係数 b_i のなす半群が有限生成となるための十分条件を考えたい。そのために $R = \mathbf{Z}[q]$ として

$$P(z) = \sum_{i=0}^k q^i z^i \in R[z]$$

を考える。

私は田村氏からこのような $P(z)$ を考えてはどうかというアドバイスを電話でいただいた。ここで改めて感謝の意を表したい。田村氏はこの場合にもワードの再帰的結合公式が成り立つと考えられている。いつもながら田村氏の恐るべき inspiration には脱帽するしかない。

さてこのとき定理 3 により $\{b_i\}$ は半群をなす。

$$\mu = l - 1 + (m - 1)k$$

とおきこれを (4) で定まる Pisot 表現の multiplier と呼ぶ。

定理 5

$$\prod_{n \geq 1} P(z^{a_n}) = \prod_{n \geq 1} (1 + qz^{a_n} + q^2z^{2a_n} + \dots + q^kz^{ka_n}) = \sum_{i \geq 0} b_i z^i$$

で $b_i \in \mathbf{Z}[q]$ を定める。 ζ を 1 の巾根としよう。 ζ^μ の位数が 2, 3, 4, 5 のどれかならば q に ζ を代入したときできる半群 $\{b_i\}_{q=\zeta}$ は有限生成で

1. 位数 2 のとき $\langle 0, -1 \rangle = \{0, \pm 1\}$
2. 位数 3 のとき $\langle 0, -\zeta^\mu \rangle = \{0, \pm 1, \pm \zeta^\mu, \pm \zeta^{2\mu}\}$
3. 位数 4 のとき $\langle 0, -\zeta^\mu, 1 - \zeta^\mu \rangle$
4. 位数 5 のとき $\{x \in \mathbf{Z}[\zeta^\mu] \mid x \text{ の Norm が } 0 \text{ または } 5 \text{ の巾}\}$

がなりたつ。ここで $\langle x_1, x_2, \dots \rangle$ は $x_1, x_2, \dots$ で生成される乗法半群である。位数が 1 または 6 以上の場合には半群 $\{b_i\}_{q=\zeta}$ は有限生成ではない。

この定理の証明は定理 3 の証明で用いた関数 $S(\cdot)$ について $S(w \oplus 0)/S(w)$ の値を詳しく調べ、少し込み入った帰納法を用いれば得られる。なぜ位数 5 以下と 6 以上で状況が一変するのかその本質はこの証明からはよく分らない。

この現象に関しては田村氏にも驚きのコメントを頂いたので、私はここではじめて田村ワールド外の世界へ少しは話が広がったのかもしれないと感じた。

さらに多項式 $P(z)$ を一般化することもできるのだが記述が煩雑になるのでこれで筆をおく。

参考文献

- [1] S. Akiyama, Pisot numbers and greedy algorithm, to appear in the Proceeding of the conference on number theory held at Eger 1996, Walter de Gruyter, Berlin, New York
- [2] M.J.Bertin, A.Decomp-Guilloux, M.Grandet-Hugit, M.Pathiaux-Delefosse and J.P.Schreiber., Pisot and Salem numbers, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992
- [3] A. Bertrand, Développement en base de Pisot et répartition modulo 1, C.R.Acad.Sc., Paris, vol. 385 (1977) 419–421
- [4] D.W. Boyd, Salem numbers of degree four have periodic expansions, Théorie des nombres, Number Theory, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 57–64, 1989

- [5] C. Frougny and B. Solomyak, Finite beta-expansions, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, vol. 12 (1992) 713–723
- [6] M.Hama and T.Imahashi, Periodic β -expansion for certain classes of Pisot numbers., preprint
- [7] K. Schmidt, On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers, *Bull. London Math. Soc.*, vol. 12 (1980) 269–278
- [8] J.Tamura, Some properties of certain infinite products, preprint
- [9] W.P.Thurston, Groups, Tilings and Finite State Automata, Summer 1989 AMS Colloquium Lectures, Research report GCG 1