数論における自己相似性

秋山茂樹 (新潟大学)

2009 年 8 月 5 日
代数学シンポジウム (明治大学)

$(X, \mathbb{B}, \mu)$ を確率空間。 T をその上の保測変換とすると $(X, \mathbb{B}, \mu, T)$ は測度論的力学系 (MDS) となる。MDS の基本定理として Poincaré の再帰定理がある。

Theorem 1. $Y \in \mathbb{B}$ が $\mu(Y) > 0$ ならば、ほとんどすべての Y の点の T-軌道は再帰的である。

そこで $\hat{T}(x) = T^{m(x)}(x)$（$m(x)$ を第一帰還時間）とおくと誘導力学系 $(Y, \mathbb{B}_Y, \frac{1}{\mu(Y)}\mu, \hat{T})$ が定義される。 誘導力学系と元の力学系は大きく異なることもある。MDS が自己誘導的であるとは、Y が X とが MDS として同型なことをいう。

以下 X はユークリッド空間の部分集合とする。この場合、自己誘導的とはアフィン同型写像 ϕ があって可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ Y \arrow[r, "\hat{T}"'] & Y \end{tikzcd}$$

が（測度ゼロの例外を除いて）成立つこととする。

Pisot 数 とは 1 より大きい実代数的整数で、その共役の絶対値が 1 より小のものをいう。自己誘導構造の拡大定数（行列の最大固有値）には Pisot 数が現れることがある。本稿ではいくつかの具体例を通じて、その現象の重要性、必然性を議論したいとおもう。以下扱う例は次の三つである。

- 無理回転と連分数
- 離散回転と領域交換
- Substitution 力学系と Pisot 予想

底に流れる問題意識は「なぜ Pisot 数が数論的な自己誘導構造の拡大係数に表れるのか？」である。

1　無理回転と連分数

無理数 $\xi \in (0,1)$ を固定し、$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ への作用 $x \mapsto x+\xi$ を考える。$(\mathbb{T}, x \mapsto x+\xi)$ の位相力学系は、極小かつ唯一エルゴード的であり Lebesgue 測度が不変測度となる。すなわち唯一通りの仕方で測度論的力学系とみなせる。この力学系は

$$x \mapsto \begin{cases} x+\xi & x \in [0, 1-\xi) \\ x+\xi-1 & x \in [1-\xi, 1) \end{cases}$$

という二区間交換である。$Y = [1-\xi, 1)$ への誘導力学系は

$$x \mapsto \begin{cases} x+\xi-\xi_2 & x \in [1-\xi, 1-\xi+\xi_2) \\ x-\xi_2 & x \in [1-\xi+\xi_2, 1) \end{cases}$$

となる。長さ 1 のトーラスでの ξ の回転が、長さ ξ のトーラスでの $-\xi_2 \pmod{\xi}$ の回転に変わった。$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi$ と書き直し、長さを 1 に正規化すると ξ_1/ξ_0 の回転が $-\xi_2/\xi_1$ に移る。同じように誘導力学系をとる操作を繰り返すと

$$\begin{aligned} 1 = \xi_0 &= a_0\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_1 &= a_1\xi_2 + \xi_3 \\ \xi_2 &= a_2\xi_3 + \xi_4 \\ \xi_3 &= a_3\xi_4 + \xi_5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

という風に ξ_n と自然数列 a_n が計算される。これから

$$\xi_0/\xi_1 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\xi_n/\xi_{n+1}}}}}$$

という正則連分数が自然に定義される。n 番目の誘導力学系の区間の長さはξ_n である。通常のように

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= a_n P_n + P_{n-1} \\ Q_{n+1} &= a_n Q_n + Q_{n-1} \end{aligned}$$

$(P_{-1}, P_0, Q_{-1}, Q_0) = (0, 1, 1, 0)$ とおくと $\nu_n = \xi_n/\xi_{n+1}$ は

$$\nu_0 = \frac{P_n \nu_n + P_{n-1}}{Q_n \nu_n + Q_{n-1}}$$

を満たす。ここで次の等式がなりたつ。

$$P_n + P_{n-1}/\nu_n = \nu_0 \dots \nu_{n-1} = 1/\xi_n$$

つまり $P_n + P_{n-1}/\nu_n$ は n 番目の誘導力学系の拡大係数を表す。とくにこの力学系が元の無理回転と同型になるのは $\nu_0 = \alpha$ が

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{Q_n + Q_{n-1}/\alpha}{P_n + P_{n-1}/\alpha}$$

を満たすことと同値であり、α は Gauss の意味で reduced な二次無理数となる。さらにこのとき拡大係数 $\kappa = P_n + P_{n-1}/\alpha$ は$\kappa^2 - (P_n + Q_{n-1})\kappa + (-1)^n = 0$ を満たす二次の Pisot 単数である。このように連分数のアルゴリズムは無理回転の力学系から自然に段階的に導かれる誘導力学系により加速した力学系とみなすことができ、その拡大係数が二次 Pisot 単数であることは、古典的な二次体の整数論で重要な役割を果たす。

連分数を Modular surface 上の測地流の coding とみなす考え方がある。そこでもこのように順に誘導力学系をとっていく考え方は基本的である ([8])。

1.1 釜江の数系

無理回転と連分数の関係のように、数論に応用される測度論的力学系には additive とそれを加速した multiplicative の二つの力学系が共存する。この角度からの一般化として釜江の数系を挙げておきたい。正確な定義は論文 [5] にあるが、大まかにいえば

- MDS はエントロピー零の作用 T (additive) と正のエントロピーをもつ作用 S (multiplicative) をもちこれらが分配法則を満たす。
- T については唯一エルゴード的である。
- 同じ測度が S の最大エントロピーを実現する唯一の測度でもある。

というものである。数論的に非常によい性質の力学系であり Diophantus 近似等への応用もあると思われるが、数論の研究者にはあまり知られていないのではないかと思う。

これに関連して注目すべき最近の結果として Arnoux-Hubert [2] の正 $2n$ 角形数系を拡張した Smillie-Ulcigrai [9] の多角形ビリヤードの力学系の研究がある。付随する記号力学系には自然に Sturm 列の一般化が定義され、測地流の力学系が働き、それに対応する additive な連分数も見つかっている。これは Hecke 群 $G(\sqrt{2})$ の Rosen 連分数とも関連している。

2 離散回転と領域交換

これはシフト基数系というある種の良い性質もつ数論的な力学系の有限性の研究から派生した問題である。次のような一見簡単な数論の問題を考えよう。

Conjecture 1. $\lambda \leq 2$ を固定する。$0 \leq a_{n+1} + \lambda a_n + a_{n-1} < 1$ で決まる整数列は初期値 $(a_0, a_1) \in \mathbb{Z}^2$ のとり方によらず常に周期的である。

(a_n, a_{n-1}) が決まると a_{n+1} が一意に定まることに注意すれば三項間漸化式のようなものである。大雑把には

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

という事であり、対応する行列の特性多項式は $x^2+\lambda x+1$ したがって固有値は絶対値 1 の互いに複素共役な複素数 $\exp(\pm\theta\sqrt{-1})$ となる。ここで $\lambda=-2\cos(\theta)$ と置いた。この行列は角 θ の回転行列と相似である。いいかえると問題の関係式は、二次元の格子点の回転であるが、単に回転すれば格子点でなくなるので微調整して行き先を格子点にする。すなわち格子点に働く離散回転の力学系となる。対称性によりこの離散回転は格子点全体の全単射を与える。一般にデジタル情報は回転することにより劣化するが、この離散回転は情報を失わない。この力学系の安定性は興味ある研究対象で、デジタルフィルターの構成とも関連して多くの研究者が興味を持っている。我々は [1] において次を示した。

Theorem 2. $\lambda=\frac{\pm1\pm\sqrt{5}}{2},\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}$ のときは予想は正しい。

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ は新しい結果でなく、Lowenstein, Hatjispyros and Vivaldi [6] がコンピュータに依存した証明を与えていた。

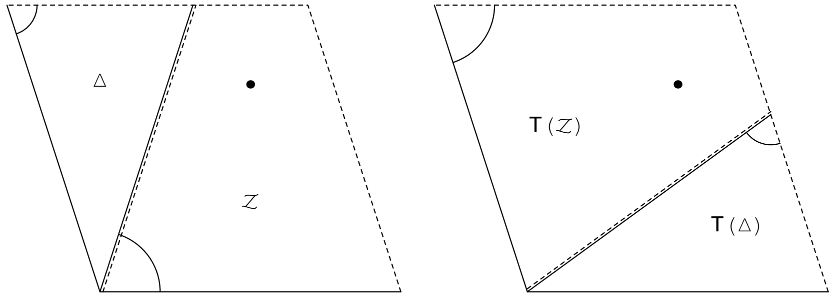
$\lambda=(1+\sqrt{5})/2$, $\zeta=\exp(2\pi\sqrt{-1}/5)$ と固定する。$x_n=\langle\omega a_n\rangle$ とおけば簡単な計算で

$$
\begin{aligned}
0\le a_n+\omega a_{n+1}+a_{n+2}&<1\\
a_n+\omega a_{n+1}+a_{n+2}&=\langle\omega a_{n+1}\rangle\\
\langle\omega a_n\rangle-\frac{1}{\omega}\langle\omega a_{n+1}\rangle+\langle\omega a_{n+2}\rangle&\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}\\
x_n-(\zeta+\zeta^{-1})x_{n+1}+x_{n+2}&\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}\\
(x_{n+1}-\zeta^{-1}x_{n+2})&\equiv\zeta^{-1}(x_n-\zeta^{-1}x_{n+1}) \pmod{\zeta^{-1}\mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

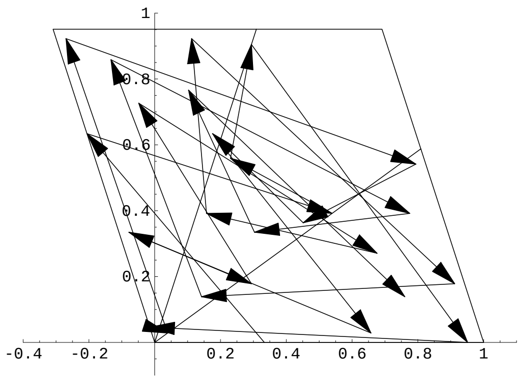
ここで

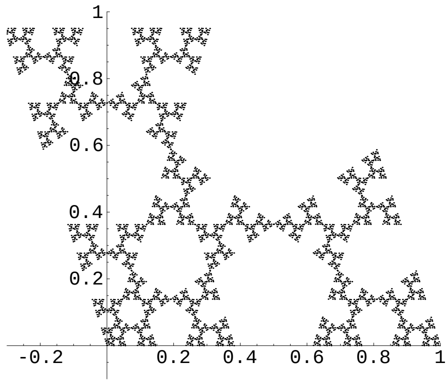
$$\left\{x-\zeta^{-1}y \mid x,y\in\mathbb{Z}[\omega]\right\}=\mathbb{Z}[\zeta]$$

なので上の問題はひし形 $L=[0,1)+(-\zeta^{-1})[0,1)$ に働く piecewise な回転 T の問題に埋め込むことができる。



よってこの場合、問題はこの作用 T によって $\mathbb{Z}[\zeta]\cap L$ の元の軌道が周期的かどうかという等価な問題に変形された。1/3 の軌道を図示すると次の図のようになる。





2.1 自己誘導構造

小さいひし形 $L' = \omega^{-2}L$ への第一帰還写像

$$\hat{T}(x) = T^{m(x)}(x)$$

を考える。$m(x)$ は $T^{m(x)}(x) \in L'$ を満たす最小の自然数である。$x \in L'$ に対して $m(x) = 1, 3, 6$ が成り立つ。ここで $x \in L$ について次が成り立つ。

$$\omega^2 \hat{T}(\omega^{-2}x) = T(x) \tag{1}$$

通常の力学系の statement は測度ゼロの例外集合があるのが常であるが、この自己誘導構造は境界部分も含めて一切の例外なく成立することに注意したい。このことが以下の記述を非常に簡単にする。証明は proof without words で図 1 を観察すればわかるだろう。

2.2 周期性

周期性の証明は自己誘導構造から別の数論的な展開を行う写像を定義することで以下のように順に行われる。

1. S を L' への 1-st hitting map と $x \mapsto \omega^2 x$ の合成とする。自己誘導構造により x の T-周期（もし ∞ でなければ）よりも $S(x)$ の T-周期は必ず短くなる。

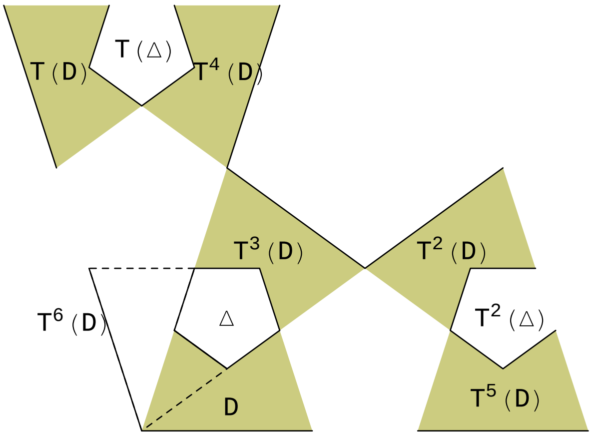


図 1: 自己誘導構造

2. $\mathbb{Z}[\zeta]$ の点について S-orbit が有限 $\Longleftrightarrow$ T-orbit が周期的
   S-orbit が周期的 $\Longleftrightarrow$ T-orbit が非周期的

3. 有限個の候補について S-orbit を調べれば証明が終わる。同じ方法で $\frac{1}{2}\mathbb{Z}[\zeta]$ の点は T-周期的である。また $1/3$ は非周期的であることも証明できる。

E.Harriss との共同でさらに詳しく以下の諸結果も示すことができた。

Theorem 3. 非周期点を含むフラクタル集合は４つの *Substitution*

$$\begin{aligned} \sigma_0(a) &= aaba, & \sigma_0(b) &= baba \\ \sigma_1(a) &= aaab, & \sigma_1(b) &= abab \\ \sigma_2(a) &= baaa, & \sigma_2(b) &= baba \\ \sigma_3(a) &= abaa, & \sigma_3(b) &= abab \end{aligned}$$

からなる *S-adic system* で記述される。その中で非周期点の全体は *Büchi* オートマトンにより認識される。

さて定理 3 に現れる Substitution は互いに共役であり、その固定点のシフトによる軌道閉包の力学系は同一のものとなる。このような力学系については次節でも議論するが、この Substitution のように各文字の像のワードの長さが等しいものは比較的易しく、その生成する力学系は良

く調べられている。この場合には Dekking の意味で高さ 1 かつ一致条件を満たす（[4, 7]）ことがわかり 2-進整数環 $\mathbb{Z}_2$ 上の $x \mapsto x+1$ の作用のなす力学系（odometer と呼ばれるもの）と同型となる。より詳しく可測写像 $\phi : \mathbb{Z}_2 \to Y'$ が具体的に書けて以下を満たす。

Theorem 4. $(Y', \mathbb{B}_{Y'}, \nu, \widetilde{T})$ は $(\mathbb{Z}_2, x \mapsto x+1)$ と同型*:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{+1} & \mathbb{Z}_2 \\ \phi\big\downarrow & & \phi\big\downarrow \\ Y' & \xrightarrow{\widetilde{T}} & Y' \end{array} \tag{2}$$

さらに除法 $\rho : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ を

$$x \mapsto \frac{x - (x \bmod 4)}{4}$$

で定めると前述の S による力学系と同型となる。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{Z}_2 \\ \phi\big\downarrow & & \phi\big\downarrow \\ Y' & \xrightarrow{S} & Y'. \end{array} \tag{3}$$

Corollary 5. すべての非周期点 $x \in \mathbf{A} \cap T(\mathcal{Z})$*,* の $\widetilde{T}$*-orbit* は非周期点のフラクタルの *Hausdorff* 測度に関して一様に分布する。

multiplicative system (Y', S) は可逆でない。その双対を共役写像 $\zeta \to \zeta^2 \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ により作れ、その attractor は図 2 のようになる。これを合併すると (Y', S) の数論的な自然拡大を構成することができ、双対システムは 4 を base とする shift をフラクタル単純弧上に実現したものになる。これにより S-orbit が純周期的となる点の全体を完全に記述することもできる。

より一般に、1 の原始 n 乗根 ζ_n に対してもひし形 $[0,1) + (-\zeta^{-1})[0,1)$ に回転作用 $x \mapsto \zeta^{-1}x$ を考え、はみ出した部分を $\mathrm{mod}\zeta^{-1}\mathbb{Z}$ で引き戻す領域交換が考えられる。Lebesgue 測度が一つの不変測度である。上に述べてきたような議論をこのような一般角での離散回転に対して行うことはできるであろうか。実は $\cos(\theta)$ が二次の場合には同様の自己誘導構造が見つかるので定理 2 を導くことができる（[1]）。ただこの場合、自己誘

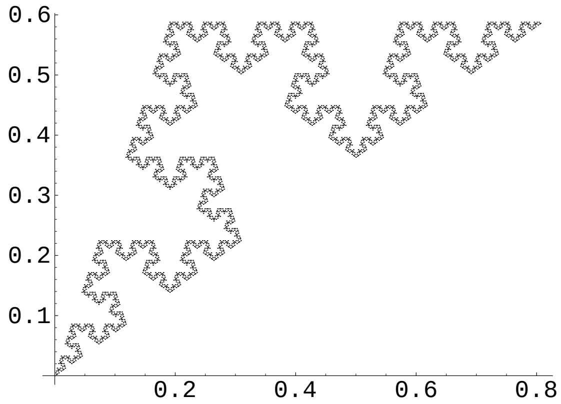


図 2: 非周期点の双対集合

導構造はひし形の全体でなくその部分領域に存在し、また境界の挙動は異なるので別に議論する必要がある。また $\cos(\theta)$ の次数が 3 次以上の場合など他の角度に関しては分かっていることは非常に少ない。重要な**未解決問題**を述べておこう。

- ほとんどすべての点は周期的か？
- Pisot 数が拡大係数として現れるか。

どちらも難しい問題と思われる。後者に関しては $\zeta_n (n = 5, 7, 8, 9, 10, 12)$ では Pisot 数が現れることがわかっている。もとの離散回転の予想と直接の関係にはないが $n = 7, 9$ では 3 次の Pisot 単数が現れる！

3 Substitution 力学系と Pisot 予想

Substitution 力学系は、additive, multiplicative の二つの作用を持つ力学系で、自己誘導構造を持つ力学系のもっとも簡単なモデルとして多くの研究がなされてきた。

k 個のアルファベット $\mathcal{A}$ による語の全体 $\mathcal{A}^* = \{0, 1, \ldots, k-1\}^*$ を語の連結により二項演算を定義し半群とする。Substitution とは $\mathcal{A}$ の半群としての homomorphism である。たとえば

$$\sigma(0) = 01,\ \sigma(1) = 12,\ \sigma(2) = 220$$

は $\{0,1,2\}$ の Substitution である。Substitution σ の作用は $a_1a_2\dots$ に $\sigma(a_1)\sigma(a_2)\dots$ のように定めれば右無限語の全体 $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ に自然に拡張される。直積位相と compatible な距離を定義し $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ を compact 距離空間にできる。

$\sigma(0)=0\dots$ とすると $\sigma(x)=x$ を満たす 0 から始まる右無限語 x が一意に決まる。これを σ の fixed point という。上の例ならば

$$x = 0112122201222022022001\dots$$

となる。s を $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ に働く左シフト、すなわち $s(a_1a_2\dots)=a_2a_3\dots$ とする。$X_\sigma=\overline{\{s^n(x)\mid n=0,1,\dots\}}$ とすると (X_σ,s) は位相力学系をなす。

Substitution σ の incidence matrix M_σ とは (i,j) 成分が $\sigma(j)$ に何個の文字 i が現れるかを表す $k\times k$ 行列とする。例の場合には

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。M_σ は非負行列であるが、これが Perron-Frobenius の意味で原始的のとき Substitution は原始的という。σ が原始的ならば (X_σ,s) は極小で唯一エルゴード的である。したがって (X_σ,s) の s の引き起こす $L^2(X_\sigma)$ 上の unitary 作用のスペクトルを問題にすることができる。一般に測度論的力学系の T の生成する unitary 作用素に非自明な固有値が存在することと weakly mixing でないことは同値である。

Theorem 6 (Bombieri-Taylor[3], Solomyak[10]). (X_σ,s) が *weakly mixing* でないためには M_σ の *Perron-Frobenius* 根は *Pisot* 数でなけばならない。

非常に単純な設定にもかかわらず (X_σ,s) のスペクトル型の分類は複雑で分類は完全には終了していない（[4, 7]）。重要な未解決問題を述べよう。M_σ の Perron-Frobenius 根が Pisot 数であるとき σ は Pisot substitution であるという。

Conjecture 2 (**Pisot 予想**). σ が *Pisot substitution* で M_σ の特性多項式が既約ならば (X_σ,s) は *purely discrete spectrum* を持つ。

まとめると、Substitutive な力学系の場合、離散スペクトルを持つような性質の良い自己誘導構造は Pisot 数を拡大係数とし、逆に Pisot 数を拡大係数とするものは compact 群上の translation と同型（[11] の３章参照）と予想されていることになる。

参考文献

[1] S. Akiyama, H. Brunotte, A. Pethő, and W. Steiner, *Periodicity of certain piecewise affine planar maps*, Tsukuba J. Math. **32** (2008), no. 1, 1–55.

[2] P. Arnoux and P. Hubert, *Fractions continues sur les surfaces de Veech*, J. Anal. Math. **81** (2000), 35–64.

[3] E. Bombieri and J. E. Taylor, *Quasicrystals, tilings, and algebraic number theory: some preliminary connections*, Contemp. Math., vol. 64, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 241–264.

[4] N. Pytheas Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1794, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[5] T. Kamae, *Numeration systems, fractals and stochastic processes*, Israel J. Math. **149** (2005), 87–135, Probability in mathematics.

[6] J.H. Lowenstein, S. Hatjispyros, and F. Vivaldi, *Quasi-periodicity, global stability and scaling in a model of hamiltonian round-off*, Chaos **7** (1997), 49–56.

[7] M. Queffélec, *Substitution dynamical systems—Spectral analysis*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1294, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[8] C. Series, *The modular surface and continued fractions*, J. London Math. Soc. (2) **31** (1985), no. 1, 69–80.

[9] J. Smillie and C. Ulcigrai, *Symbolic coding for linear trajectories in the regular octagon*, arXiv:0905.0871.

[10] B. Solomyak, *Dynamics of self-similar tilings*, Ergodic Theory Dynam. Systems **17** (1997), no. 3, 695–738.

[11] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 79, Springer-Verlag, New York, 1982.