

Pisot 数

秋山 茂樹

1. 読者への挑戦状: べき乗の小数部分の分布

分かりやすい未解決問題は数論ファンを魅了してやまない。双子素数、 $3n+1$ 問題、奇数の完全数はあるか、オイラー定数は無理数か…。無名のものも多くある。その一つを紹介しよう。

1 より大きい実数 α を考え、 $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$ という α のべき乗でできる数列の小数部分 $\langle \alpha^n \rangle$ がどのように分布するか考えてみる。例として $\alpha = 1.5$ とすると

$$\begin{aligned} 1.5^1 &= 1.5 \\ 1.5^2 &= 2.25 \\ 1.5^3 &= 3.375 \\ 1.5^4 &= 5.0625 \\ 1.5^5 &= 7.59375 \end{aligned}$$

だから

$$0.5, 0.25, 0.375, 0.0625, 0.59375, \dots$$

となる。最初の 10000 項を計算し $[0, 1]$ 区間を 20 等分したときどこに入るかの度数分布を書いてみると図 1 のようになり、かなり均等に散らばっているように見える。

実数列 a_n が一様分布するとは、小数部分 $\langle a_n \rangle$ が $[0, 1]$ に均等に散らばること、つまり任意の部分区間 $[a, b]$ について

$$\frac{a \leq \langle a_n \rangle \leq b \text{ となる } M \text{ 以下の自然数 } n \text{ の個数}}{M}$$

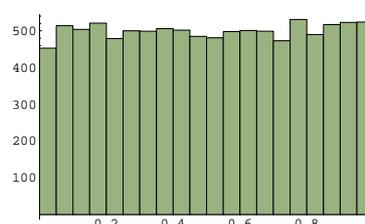


図 1 $\langle (3/2)^n \rangle$ の分布

が M を大きくすると $b-a$ に収束することと定義する。上に述べた 1.5^n は一様分布するのだろうか。知る人ぞ知る未解決問題の一つである。ほとんど全ての $\alpha > 1$ について α^n は一様分布することが Koksma により証明されている⁷⁾。しかし具体的な α で α^n が一様分布するものは一つも知られていない。なんとも不愉快だが数論ではよくある状況だ。読者の中から挑戦者が現れるのを待っているのかもしれない。

2. 奇妙な数の登場: Pisot 数の定義と例

逆に α^n が一様分布しない具体例はあるだろうか。実は、本稿の主人公の Pisot 数とよばれる一連の奇妙な数が存在する。

例として黄金比 $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.61803$ で同じ計算をしてみよう。 $\|x\|$ を x と一番近い整数との距離とすると

$$\|\alpha^1\| = 2 - 1.61803 = 0.38197$$

$$\|\alpha^2\| = 3 - 2.61803 = 0.38197$$

$$\|\alpha^3\| = 4.23607 - 4 = 0.23607$$

$$\|\alpha^4\| = 7 - 6.85410 = 0.14590$$

$$\|\alpha^5\| = 11.09017 - 11 = 0.09017$$

のように 0 に近づいていることがわかる。この理由は簡単だ。 $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$ とおけば α, β は $x^2 - x - 1 = 0$ の二つの根となる。根と係数の関係で $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ で $\alpha^n + \beta^n$ は $n = 1, 2, \dots$ で常に整数となる。なぜなら基本対称式 $p = \alpha + \beta$ と $q = \alpha\beta$ で表すと p, q の整数係数の多項式でかけるからだ。ところが $|\beta| < 1$ なので β^n は 0 に近づき結局 α^n も整数に近づかなければならない。

このアイデアを一般化すると次のような数が考えられる。 c_0, c_1, \dots, c_{n-1} を整数とし $\alpha > 1$ は $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_0$ の根、さらに他の根は全て絶対値が 1 より小とする。このような性質を満たす方程式の根 α を **Pisot 数**^{*1)} という。 α が Pisot 数ならば黄金比と同じ理由で $\|\alpha^n\| \rightarrow 0$ となってしまう。特別な場合として 2 以上の整数も Pisot 数である。逆に $\|\alpha^n\| \rightarrow 0$ が成り立つのは $\alpha > 1$ が Pisot 数になる場合に限ると予想されている。

Salem¹⁴⁾ は Pisot 数の全体が実軸上で閉集合となるという驚くべき結果を示している。黄金比は Pisot 数の最小の集積点で、これより真に小さな Pisot 数はリストアップする事ができる²⁾。最小の 10 個は

| | |
|---------|----------------------------------|
| 1.32472 | $x^3 - x - 1$ |
| 1.38028 | $x^4 - x^3 - 1$ |
| 1.44327 | $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1$ |
| 1.46557 | $x^3 - x^2 - 1$ |
| 1.50159 | $x^6 - x^5 - x^4 + x^2 - 1$ |
| 1.53416 | $x^5 - x^3 - x^2 - x - 1$ |
| 1.54522 | $x^7 - x^6 - x^5 + x^2 - 1$ |
| 1.56175 | $x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + x - 1$ |
| 1.57015 | $x^5 - x^4 - x^2 - 1$ |

*1) Pisot-Vijayaraghavan 数 (PV 数) とも呼ばれる。

$$1.57368 \quad x^8 - x^7 - x^6 + x^2 - 1$$

となる。最小と二番目の Pisot 数は Siegel によって決定された。最小の $\theta = 1.32472$ は $x^3 - x - 1$ の根だが、他の二根は複素共役で $-0.66236 \pm 0.56228i$ となり絶対値は 1 より小さい。試しに 100 乗は

$$\theta^{100} = 1630580875001.99999953705\dots$$

で確かに整数に近い。

3. 反発力をもつ数: Pisot 数と準結晶

Pisot 数は少し変わった代数的な対象だが、驚くほど多様な数理科学の諸分野に現れる。その一つの理由は Pisot 数がある種の反発力(?) をもっていることにある。例として係数が $-1, 0, 1$ だけからなる黄金比の多項式で表せる数の全体を考えてみよう。 $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ として

$$S = \left\{ \sum_{n=0}^{\ell} a_n \alpha^n \mid \begin{array}{l} a_n = -1, 0, 1 \\ \ell = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\}$$

とおけば S は実数軸 (一次元ユークリッド空間) の中で二つの重要な性質を満たしている。

1. S の隣合う二点間の距離は一定値 $R > 0$ 以下。
2. S の隣合う二点間の距離は一定値 $r > 0$ 以上。

最初の性質を S が実軸で相対稠密であるといい、後の性質を一樣離散という。相対稠密かつ一樣離散な集合を **Delone 集合** という。これらの

図 2 S のなす Delone 集合

概念は距離空間であれば同じように定義されるが、以下にあつかうのはユークリッド空間の Delone 集合である。整数はもちろん一次元ユークリッド空間の Delone 集合であり $R = r = 1$ ととれる。 S が実軸で相対稠密なのは簡単に分かる。 S が一次元ユークリッド空間で一樣離散なことを示そう。

S の二点間距離は

$$A = \sum_{n=0}^{\ell} (a_n - b_n) \alpha^n$$

だが、これに対して

$$B = \sum_{n=0}^{\ell} (a_n - b_n) \beta^n$$

を考える。 $|a_n - b_n| \leq 2$ より等比級数で上から評価すれば $|B| \leq 2/(1 - |\beta|)$ となる。前節同様に積 AB は α, β の基本対称式 $p = \alpha + \beta, q = \alpha\beta$ の整数係数の多項式になるので、 AB は整数になる。従って $A \neq 0$ ならば $|AB| \geq 1$ であり

$$|A| \geq 1/|B| \geq \frac{1 - |\beta|}{2} = 0.19098 > 0$$

なので二点間距離は一定値より以上。従って一様離散となる。この証明から α が Pisot 数のとき

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\ell} a_n \alpha^n \mid \begin{array}{l} |a_n| \leq K, a_n \text{ は整数} \\ \ell = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\}$$

はいつでも一様離散である。つまり α が Pisot 数ならば $\sum_{n=0}^{\ell} a_n \alpha^n$ という形の元は、あまり近づくことができない。さらに図 2 をよく観察すると図 3 のように S の二点間距離は 3 種類しかない！（この性質については後述する。）

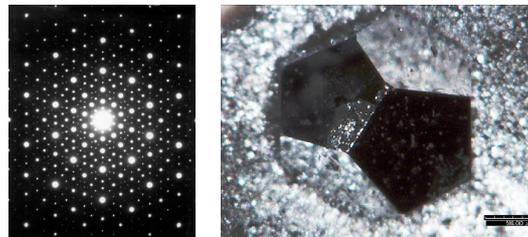
$$|b|c|b| a |b| a |b|c|b| a |b| a |a |b| a |b|c|b| a |b| a |b|c|b|$$

図 3 S は 3 区間によるタイル張り

歴史的には Pisot 数は調和解析における例外集合として様々な問題に登場してきた。定められた集合上で二つの Fourier 級数の値が一致すれば Fourier 係数が完全に一致するかどうかを調べる「一意性集合」の問題²⁾ や、 $|\lambda| < 1$ となる λ を固定しランダムに符号を選んだ時の $\sum_{n=1}^{\infty} \pm \lambda^n$ の分布の問題¹¹⁾ などがある。その根源的な理由は Pisot 数の多項式の形の二点は近づけないので、それで生成される点集合は実軸にランダムに分布できないことにある。

原子や分子はその物理的制約から一定の距離以下に近づくことはできない。Pisot 数の多項式で表される数はこのような状況を数理モデル化するのにも適している。

結晶構造は次元と同数の一次独立な周期（並進対称性）と回転対称性を持ち、ユークリッド空間の等長変換群のうちコンパクトな基本領域をもつ離散部分群により記述される。このような群は次元が定めれば有限種類であり^{*2)}、二次元では 17 個、三次元では 230 個に分類され結晶学の常識となっている。ところが 1984 年に Shechtman 等¹⁶⁾ は、アルミニウムとマンガンの合金を液体状態から急冷した固体の X 線回折像が五角対称の離散的な輝点を示すことを見つけた。下図は最新の物性研究の成果^{*3)}である。三次元では 2, 3, 4, 6 回で一回転



(a) 電子回折像

(b) 外形

する回転対称性（つまり、 $180^\circ, 120^\circ, 90^\circ, 60^\circ$ の回転）以外は並進対称性と両立しない。

簡単に説明してみよう。並進対称性により結晶は図 4 のような格子の構造を持っている。さらに点 O に関する五角対称性（ 72° の回転）をもつと仮定しよう。点 O にもっとも近い格子点 A を考えると格子はベクトル \vec{OA} の平行移動で不変となる。従ってこれを 144° 回転したベクトル \vec{OB} でも不変であり、従って $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$ でも不変となる。ところが C は A より O に近くなってしまうので A の取り方に矛盾する。

この説明は三次元でも通用し、このような構造

*2) Hilbert の第 18 問題。 Bieberbach により 1910 年に解かれた。

*3) この驚くべき鮮明な画像は東北大の蔡安邦 (A.P.Tsai) 教授による。本稿での掲載を快諾いただき感謝します。

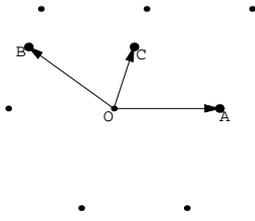


図 4 五角対称の結晶は不可能

は三次元結晶ではありえない^{*4)}。一方で回折像が離散的な輝点を持つのは、その物質が大域的には同一構造のくりかえしを持ち、そのため反射波が共鳴していることを示している。これは新しい物質の内部状態の発見であり準結晶と名付けられた。

準結晶の数理モデルとして分子の位置を表す点集合を考えれば Delone 集合となる。しかし Delone 集合であるだけでは、同一構造のくりかえしをもつ事がいえない。どこで切っても金太郎飴というかどこで地図を描いても似たようなものを考えたい。準結晶発見よりも 10 年以上遡るが Meyer¹⁰⁾ は有限集合 F が存在して

$$X - X \subset X + F \quad (1)$$

の成り立つ Delone 集合 X を考えた。これを Meyer 集合という。研究の一つの動機は、調和解析の理論を準結晶のような非周期的な集合で展開することにあつたものと思われる。Meyer 集合は (1) により F が空集合ならば X が群構造を持つので格子となる。 F が一点からなる場合も X は格子を平行移動したものになる。

Meyer 集合ならば (1) により $X - X$ も一様離散となる。半径を決めて任意の点の近くの地図を作ると有限個しかない。特に一次元 Meyer 集合はいつでも図 3 のような有限種類のタイルによるタイル張りをなす。

黄金比から作った S は Meyer 集合の例で $F = \{-3, 0, 3\}$ とすると (1) を満たす。 $S - S$ が一様離散になるのは S と同様の Pisot 数の‘反発力’の証明でもわかる。 S は左右対称で、どこで切つ

*4) 四次元以上では回転不変面が中心以外には格子点を含まない場合がありこの説明は通用しない。実際に五角対称性を持つ空間群が存在する。

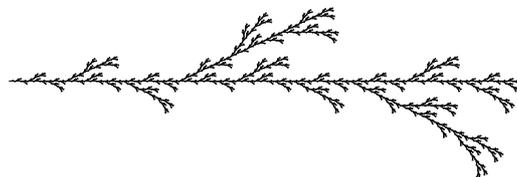
もその右側は非周期的となる。なぜなら S の元の形から、最小の周期 $M > 0$ をとれば αM も周期となる。よって $(\alpha - 1)M$ も周期となり最小性に矛盾してしまう。

Meyer 集合は一般の Delone 集合よりも準結晶を考える枠組みとしてふさわしい。Lagarias⁸⁾ は $X - X$ が一様離散な Delone 集合と Meyer 集合は同じ概念であることを示した。準結晶のモデルとして著名な切断射影集合は Meyer 集合の特別な場合である¹⁵⁾⁸⁾。

4. 自然を記述する言語: 自己相似性と Pisot 数

結晶学は対称性により構造を分類したので、準結晶も対称性が本質的と思われるかもしれない。だが実際は自己相似性を鍵として構造に切り込む事で興味深い数理モデルが得られる。

世の中を説明するのに人間は「簡単なモデルで複雑な現象を説明する」ことを好む。複雑な現象が複雑な理由で起きているというのでは何も分かったような気がしないからだ。心の問題や不条理の世界は文学の題材になっても自然科学では扱われない。自己相似性はそのような数理モデルの典型だ。たとえば次の図は自分自身の 5 つの縮小コピー

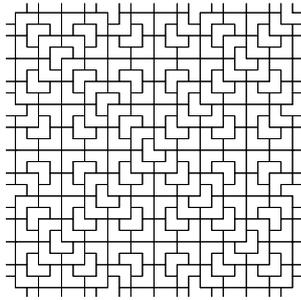


で出来ている^{*5)}。そのことだけ知っていれば簡単に同じ絵を描ける。にもかかわらず見た感じは複雑で、自然の樹木の絵のような感じがしないでもない。人間が感じる「自然の美」の要素の一つは自己相似性かもしれない。

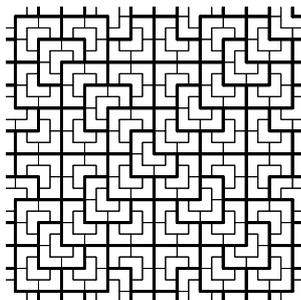
ユークリッド空間の Meyer 集合がこのような自己相似性を持つならば、準結晶の分かりやすいモデルとして最適だろう。

*5) 畑の樹木集合と呼ばれるものの一種で反復写像系のアトラクタの例。植物等の形態を記述する仕組みは文脈自由言語等を用いる形に一般化され L-system¹²⁾ とよばれている。

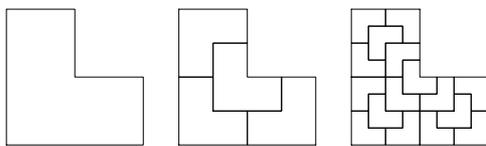
そのような集合はどのような手順で作り出せるだろうか。これは空間の準周期的なタイル張りの問題と考えることができる。有限種類のタイルの組み合わせで空間を埋め尽くし、拡大細分構造を持っているものを自己相似タイル張りという。拡大細分構造とは、一つのタイルを拡大すると幾つかのタイルに分割されるという一種の自己相似構造である。次の図で説明しよう。



は次のように



4つずつブロックに分けられる。太線だけみれば元のタイル張りの相似拡大となっていて一つのタイルを2倍に相似拡大すると4つのタイルに分かれる。これが拡大細分構造である。ブロックの作り方は一意だ。この自己相似タイル張りは下図の

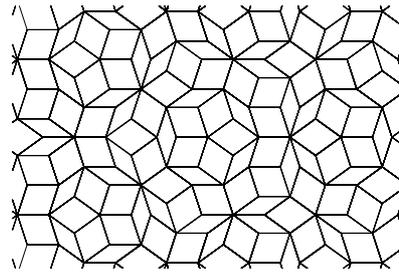


置換操作をくりかえすことで簡単に作れる。これは椅子タイルと呼ばれ、上述の一意性により非周期的となる⁵⁾。対応する点集合は格子の部分集合なので面白い Meyer 集合にはならないが拡大率2は Pisot 数であることに注意しよう。

図3の集合 S も自己相似タイル張りとなる。原点对称で区間の長さは $a = 1/\alpha$, $b = 1/\alpha^2$, $c = 1/\alpha^3$ 。原点の右側は ab と $abcb$ の二つのブロックからなり、各ブロックを α^2 倍すると $ab \rightarrow ab|abcb$, $abcb \rightarrow ab|abcb|abcb$ という置換操作のくりかえしによる拡大細分構造をもつ:

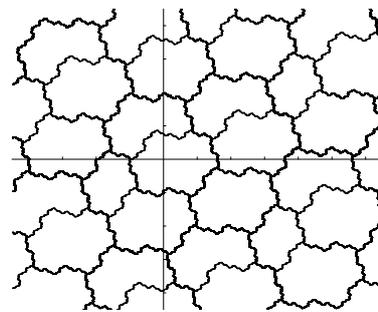
$$ab\ abcb|ab\ abcb\ abcb|ab\ abcb|ab\ abcb\ abcb|ab\ abcb\ abcb|\dots$$

拡大率 α^2 は二次の Pisot 数である。強い意味の非周期性で有名な Penrose タイリングも拡大率



α^2 の自己相似性を持つ。図のように五角対称性を持つものもある。ただし拡大細分構造は少し複雑で置換操作はタイルの形を完全には保たない^{5, 18)}。

一般に Pisot 数を用いると同様の置換操作のくりかえしにより非周期的で拡大細分構造を持つタイル張りを作ることができる^{13) 1) 19)}。次の図は三次の Pisot 数を拡大率とする Rauzy フラクタルと呼ばれる複素平面のタイル張りである。



この自己相似タイル張りは $x^3 - x^2 - x - 1$ の根の Pisot 数 $\theta = 1.83929$ から作ったもので複素根 $\theta' = -0.41964 - 0.60629i$ の逆数倍(複素平面の相似拡大)をすると、各タイルは他の幾つかのタイルに拡大細分される。このタイル張りの3つのタイルの共有点の集合は二次元の Meyer 集合で

それ自身の $1/\theta'$ 倍を含む。

Thurston-Kenyon⁶⁾ は二次元の自己相似タイル張りの拡大率は複素 Perron 数でなくてはならないことを示した。ここで複素 Perron 数とは Pisot 数を含む概念で、複素共役を除く他根の絶対値がそれより小のものをいう。Rauzy フラクタルでは $1/\theta'$ は複素 Pisot 数となる。

Bombieri-Taylor³⁾ は、どのような Delone 集合の回折像が可算個の輝点を持つかを調べる先駆的な仕事を行った。置換のくりかえしでできる一次元の自己相似 Delone 集合が輝点を示すためには拡大率に Pisot 数が現れなければならないことが示されている。Senechal の平易な解説書¹⁵⁾ もある。自己相似性タイル張りから得られる点集合の回折像はいつ輝点を含むのか、いつ純点スペクトルとなるか等は重要な問題で、タイル張り力学系のスペクトル型分類と対応させた研究が進んでいる¹⁷⁾⁴⁾。そこでも Pisot 数またはその拡張が本質的な役割を果たす。

一般には Meyer 集合の回折像は輝点を含むとは限らない。にもかかわらず Lagarias⁹⁾ は実数 $\alpha > 1$ について実軸上の Meyer 集合 X が αX を含むならば α は Pisot 数または Salem 数でなくてはならないことを示した。Salem 数は Pisot 数の親戚で単位円内だけでなく単位円周上にも根を許したものである。黄金比から作った S は αS を含むので、この結果の具体例となる。さらに S は純点スペクトルを示し、切断射影集合の例にもなっている。

このように Pisot 数を用いると自己相似タイル張りが構成でき、その逆に自己相似タイル張りの拡大率は本質的に Pisot 数またはその類似しかない。自己相似性の深部には思いがけない Pisot 数が潜んでいるのである。

参考文献

- 1) P. Arnoux and Sh. Ito. Pisot substitutions and Rauzy fractals. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, Vol. 8, No. 2, pp. 181–207, 2001.
- 2) M.-J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse, and J.-P. Schreiber.

- Pisot and Salem Numbers*. Birkhäuser, 1992.
- 3) E. Bombieri and J. E. Taylor. Quasicrystals, tilings, and algebraic number theory: some preliminary connections. In *Contemp. Math.*, Vol. 64, pp. 241–264. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
 - 4) N. Pytheas Fogg. *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Vol. 1794 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
 - 5) B. Grünbaum and G. C. Shephard. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Company, New York, 1987.
 - 6) R. Kenyon. The construction of self-similar tilings. *Geometric and Funct. Anal.*, Vol. 6, pp. 471–488, 1996.
 - 7) L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform Distribution of Sequences*. J. Wiley and Sons, New York, 1974.
 - 8) J.C. Lagarias. Meyer's concept of quasicrystal and quasiregular sets. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 179, No. 2, pp. 365–376, 1996.
 - 9) J.C. Lagarias. Geometric models for quasicrystals I. Delone sets of finite type. *Discrete Comput. Geom.*, Vol. 21, No. 2, pp. 161–191, 1999.
 - 10) Y. Meyer. *Algebraic numbers and harmonic analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1972.
 - 11) Y. Peres, W. Schlag, and B. Solomyak. Sixty years of Bernoulli convolutions. In *Fractals geometry and Stochastics II*, Vol. 46 of *Progress in Probability*, pp. 39–65, 2000.
 - 12) P. Prusinkiewicz and A. Lindenmayer. *The algorithmic beauty of plants*. The Virtual Laboratory. Springer-Verlag, New York, 1990.
 - 13) G. Rauzy. Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, Vol. 110, No. 2, pp. 147–178, 1982.
 - 14) R. Salem. *Algebraic numbers and Fourier analysis*. D. C. Heath and Co., Boston, Mass., 1963.
 - 15) M. Senechal. *Quasicrystals and geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
 - 16) D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J. W. Cahn. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 53, No. 20, pp. 1951–1953, Nov 1984.
 - 17) B. Solomyak. Dynamics of self-similar tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, Vol. 17, No. 3, pp. 695–738, 1997.
 - 18) R.A. ダンラップ. 黄金比とフィボナッチ数. 日本評論社, 2003.
 - 19) 秋山茂樹. 記号力学系と数系タイル張り. *数学*, No. 4, pp. 351–365, 2004.

(あきやま・しげき, 新潟大学理学部)