公開講座　身近な数学
多面体の体積と切り貼り—Dehn の定理—

川村一宏
筑波大学数理物質系数学域
kawamura@math.tsukuba.ac.jp

2025 年 7 月 19 日

1　はじめに

底辺の長さ L, 高さ h の三角形 Δ の面積 $\mathrm{Area}(\Delta)$ は

$$\mathrm{Area}(\Delta) = \frac{1}{2}Lh \tag{1.1}$$

で与えられることは小学校で習いました. どのように証明したかを思い出してみましょう (図 1 , 図 2).

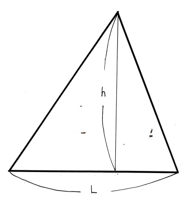

図 1: 三角形 Δ

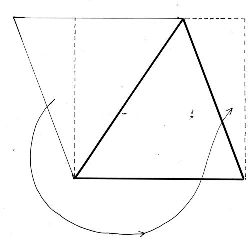

図 2: 面積の求め方

同様に底面積 S, 高さ h の三角錐 T（図 3）の体積 $\mathrm{Vol}(T)$ は

$$\mathrm{Vol}(T) = \frac{1}{3}Sh \tag{1.2}$$

で与えられます.

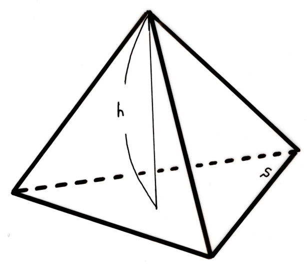

図 3: 三角錐 T

上の公式もやはり小学校で習いますが, (1.2) において"3"が現れる理由についてどのように説明されていたか覚えていますか? 何人かの大学生・大学院生に聞いてみましたら, 大抵の人が次のように習っていました. 底面積 S, 高さ h の三角柱 D の体積が $\mathrm{Vol}(D) = Sh$ で与えられることは自然に納得できる. そして実際に水を入れて測ってみると, T に入れた水 3 杯でちょうど D を満たすことができる. だから $\mathrm{Vol}(T) = \frac{1}{3}\mathrm{Vol}(D) = \frac{1}{3}Sh$.

小学校の内容としてはこれで十分ですが, 数学的な証明が欲しいところです. 通常の証明は積分法を用いますが, ここでは (本質的には同じことながら) 次のように考えてみます. T の頂点を v として, v から底面におろした垂線 (長さは h) を n 等分します. 上から k 番目 $(k = 1, 2, \ldots, n)$ の等分点を p_k として p_k において T を水平面で切断します（図 4）.

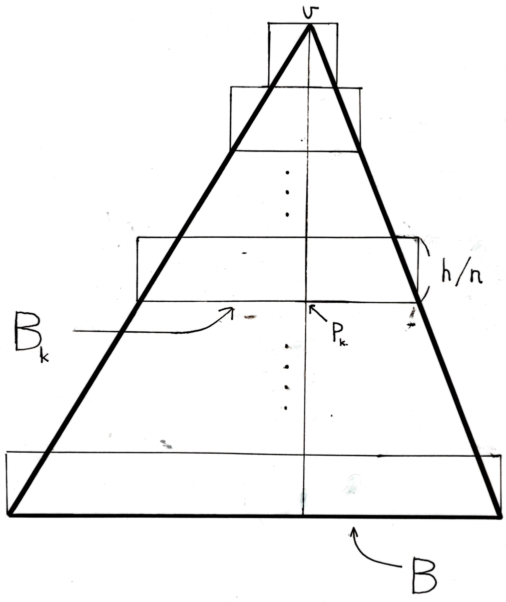

図 4: 三角錐 T の T_n による近似

切断面 B_k は底面 B と相似な図形で, 相似比は

$$B_k : B = \frac{k}{n} : 1$$

です. $B = B_n$ に注意してください. 面積は相似比の 2 乗に比例しますから

$$\mathrm{Area}(B_k) : \mathrm{Area}(B) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 : 1$$

つまり $\mathrm{Area}(B_k) = (\frac{k}{n})^2 \mathrm{Area}(B)$ です. B_k を底面として高さ $\frac{h}{n}$ の角柱 D_k を考えると, その体積は

$$\mathrm{Vol}(D_k) = \mathrm{Area}(B_k)\frac{1}{n} = (\frac{k}{n})^2 \mathrm{Area}(B) \cdot \frac{h}{n} = \frac{k^2}{n^3} Sh$$

と表せます. だから $D_1, \dots, D_n$ を積み重ねて作った立体 T_n の体積は

$$\mathrm{Vol}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} Sh = \frac{1}{n^3} Sh \sum_{k=1}^{n} k^2 \tag{1.3}$$

と表せます. ここで次の式が成り立ちます. 高等学校で習った人もいらっしゃるかもしれません.

補題 1.1.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Proof. ここでは数学的帰納法によることにします. $n=1$ で上の式が成り立つことは直接に確かめられます. n に対して上の式が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \frac{n+1}{6}\{n(2n+1) + 6(n+1)\} = \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right) \\
&= \frac{(n+1)\{(n+1)+1\}\{2(n+1)+1\}}{6}.
\end{aligned}$$

これで証明されました. □

上の補題から (1.3) は次のように書けます:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(T_n) &= \frac{1}{n^3} Sh \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} Sh \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} Sh = \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) Sh.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで n をどんどん大きくしてみますと, T_n はどんどん T に近づいていきますから $\mathrm{Vol}(T_n)$ も $\mathrm{Vol}(T)$ に近づきます. ところで (1.4) の最後の式に現れる $\frac{1}{n}$ は n が大きくなるにつれてどんどん 0 に近づきますから,

$$\mathrm{Vol}(T) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Vol}(T_n) = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times Sh = \frac{1}{3} Sh.$$

これが (1.2) において"3"が現れる理由です.

(1.1) と (1.2) の証明を比べると, そこにははっきりとした違いが認められます. (1.1) の証明においては有限回の図形の切り貼り操作しか使われていないのに対して, (1.2) の証明においては, まず T を T_n で近似し, 次に近似の度合いを上げた極限として体積を求めています, (1.1) の証明のほうが簡単であることは明らかですから,, 自然な問題として

問題. (1.2) の証明を (1.1) の証明と同様, 簡単な図形の切り貼りによって行うことはできないか?

という疑問が生まれます. この問題はギリシャ時代にまでさかのぼることができます. ユークリッドの「幾何学原論」での該当箇所（定理 XII,5) をみるとユークリッドが上のような疑問を持っていたのではないか?と想像できる書き方がなされています ([3]) . F. Bolyai (1775-1856), Gauss (1777-1855) 等も興味を持っていました. 明確に定式化されたのは D. Hilbert (1862-1943) が 1900 年第 2 回国際数学者会議において行った講演においてのことです. Hilbert は講演及びその後の報告集において 23 の数学の未解決問題を提示しました. 上の問題は第 3 問題として述べられています. この問題は 1905 年に M. Dehn(1878-1952) によって解決されました.

Dehn の考え方は, 多面体に関する「不変量」を考えるものでした. ここでは Hadwiger 等による整理された証明を紹介します.

2 多面体の分割合同

(1.1) の証明の中心的な役割を果たすのは, **任意の**三角形をうまく分割すると同じ面積を持つ長方形を作り出すことができるという事実でした. もしも (1.2) についても同じような証明ができるならば, 以下のことが成り立つことが期待できるでしょう：

問題. T を任意の三角錐とする. T をうまく分割して同じ体積を持つ立方体に組み直すことができるか?

Hilbert の第 3 問題は上の問いをもっとはっきりと述べたものです. 問い方から Hilbert 自身は上の問題の答えは否定的であろうと考えていたことが推察されます：

Hilbert の第 3 問題. 等しい底面積と等しい高さを持つ 2 つの 4 面体で,

どのようにしても合同な 4 面体達に分割できず, また合同な 4 面体を付け

加えてできるどんな2つの多面体もそれら自身合同な4面体に分割できないものは存在するか?

ここで次のような概念を導入します. 3次元空間の2つの多面体 P, Q が合同であるとき $P \equiv Q$ と表すことにします. $P \equiv Q$ とは P をうまく動かして Q にぴったり重ねることができる, と考えていただいて構いません.

定義 2.1. A と B を多面体とする.

(1) A と B が**分割合同**であるとは, A と B を同数の多面体 $P_1, \ldots, P_N$ および $Q_1, \ldots, Q_N$ にそれぞれ分解して

$$\begin{aligned} A &= P_1 + \cdots + P_N, \\ B &= Q_1 + \cdots + Q_N \end{aligned}$$

かつ $P_1 \equiv Q_1, \ldots, P_N \equiv Q_N$ が成り立つようにできることとする. このとき $A \sim B$ と表す.

(2) A と B が**補充合同**であるとは, 同数の多面体 $A_1, \ldots, A_L$ 及び, $B_1, \ldots, B_L$ を $A_1 \equiv B_1, \ldots, A_L \equiv B_L$ かつ

$$A + A_1 + \cdots + A_L \sim B + B_1 + \cdots + B_L$$

が成り立つように見出すことができることとする.

上の概念は平面上の多角形についても全く同じように定義することができます. 次の定理は平面上の多角形については Hilbert 第3問題の類似は正しいことを述べています.

定理 2.2. *(Bolyai-Gerwien 1833)* L_1 と L_2 を平面上の *2* つの多角形とする. このとき次は同値である.

(1) $\mathrm{Area}(L_1) = \mathrm{Area}(L_2)$.

(2) L_1 と L_2 は分割合同.

(3) L_1 と L_2 は補充合同.

一方 Hilbert 第3問題に対して Dehn が与えた回答は以下の定理です. Hilbert が予想した (あるいはしていたであろう) ことが正しいことを示しています.

定理 2.3. *(Dehn, 1905) 4* 面体 T_1, T_2 で $\mathrm{Vol}(T_1) = \mathrm{Vol}(T_2)$ でかつ分割合同でない（さらに補充合同でもない）ものが存在する.

次の節で上の定理の証明を概観します.

3　Dehn 不変量

以下では集合に関する基本的な記号をいくつか使います．ここに現れる集合は全て有限集合で，「数のいくつかの集まり」と思っていただいて差し支えありません．

P を多面体とします．P の辺 e は 2 つの面の共通辺として現れています．e を共通辺としてもつ面を F_1, F_2 とします．F_1 と F_2 のなす 2 面角を θ_e とおき，e の長さを $\ell(e)$ とします (図 5)．

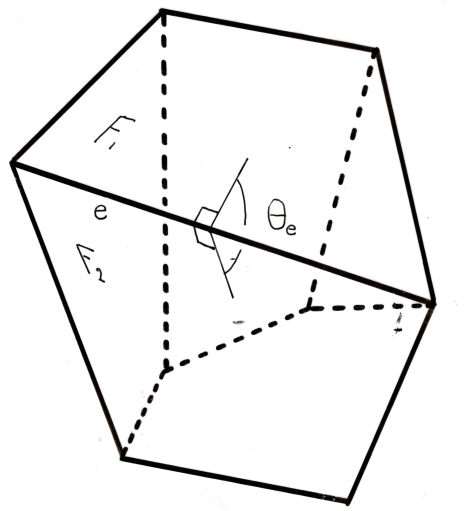

図 5: 多面体

P の全ての辺によって定まる θ_e に円周率 π を加えてできる集合を M_P とします．つまり

$$M_P = \{\theta_e \mid e \text{ は } P \text{ の辺}\} \cup \{\pi\}$$

です. M_P を含む実数の有限集合 M を一つ固定し, M の各要素 α にたいして数 $f(\alpha)$ を割り当てます. 但し

$$f(\pi) = 0 \tag{3.1}$$

と約束します. M_P そのものでなく M を考える理由は後で明らかになります. ここで M の要素の有理数係数 ”線形和”, つまり

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i, \quad \text{ただし } r_i \text{ は有理数}, n < \infty$$

の全体からなる集合

$$V(M) = \{\sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i \mid \text{各 } r_i \text{ は有理数}, n \text{ は自然数}\}$$

を考え,

$$\bar{f}(\sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(\alpha_i)$$

と置くことによって実数値関数 $\bar{f} : V(M) \to \mathbb{R}$ を定めます.

ここで一つの問題があります. $V(M)$ の要素は二通りの表し方があることがあります：

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} s_j \beta_j.$$

例えば π だけでなく $\pi/2$ も M の要素であるとき,

$$1 \cdot \pi + 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi = 2 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

など. このとき

$$\sum_{i=1}^{m} r_i f(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} s_j f(\beta_j),$$

が成り立つとは限りません. つまり $\bar{f}$ が $V(M)$ の各要素に対して唯一つの値を定めるという意味での「関数」でない可能性があります. このことは色々なところで不都合を引き起こすので、そのようなことがないような保証が必要です. そこで次のように考えましょう:

M の部分集合 B で次の (a) (b) を満たすものを考えます.

(a) どんな $V(M)$ の要素も

$$\sum_{i=1}^{m} r_i\alpha_i,\quad \alpha_i \text{ は } B \text{ の要素},\ r_i \text{ は } 0 \text{ でない有理数}$$

の形で表せる.

(b) B に真に含まれる任意の集合 B', つまり $B' \subsetneqq B$ を満たす任意の集合 B', は (a) を満たさない

まずこのような B は必ず存在することを確かめます. まず M 自身は (a) を満たします. M から 1 つの要素を取り除いてできた集合が (a) を満たすかどうか考えましょう. もしも M からどの一つの要素を取り除いても (a) が成り立たないなら $B = M$ とすればよい. もしも M の要素 α_1 を取り除いた集合が (a) を満たすなら, $C_1 = M \setminus \{\alpha_1\}$ とします. C_1 からどの一つの要素を取り除いても (a) が成り立たないなら, $B = C_1$ とすればよい. もし C_1 の要素 α_2 を取り除いてもまだ (a) が成り立つなら $C_2 = C_1 \setminus \{\alpha_2\}$ と置きます. これを繰り返すと要素の数はだんだん減っていきますから、どこかのステップでこれ以上要素を減らせないところに到達します. そのステップで得られた集合を B とすれば, B は (b) を満たしますからこれが求めるものです.

このとき B の要素を並べて $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ とおきましょう. このとき

(∗) 0 以外のどんな $V(M)$ の要素も

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\beta_i,\quad r_i \text{ は有理数} \neq 0$$

の形に**ただ一通りに**表せる

ことが次のようにして示せます： 仮に

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\beta_i = \sum_{i=1}^{n} s_i\beta_i,\quad r_i, s_i \text{ は有理数} \neq 0$$

と書けたとします. もしもある添え字 i に対して $r_i \neq s_i$ としますと、

$$\beta_i = \frac{-1}{r_i - s_i}\sum_{j\neq i}(r_j - s_j)\beta_j$$

と書けますから、β_i は $\beta_j,\ j \neq i$ によって表されます. したがって β_i を上の式で置き直せば, $V(M)$ の要素は β_i を使わずに表せることになり, B が (b) を満たすことに矛盾します. よって $r_i = s_i$ が任意の i に対して成り立ち, (∗) が証明できました.

注意 3.1. 大学一年生で学ぶ線形代数学をご存知の方は, 上で行ったことは有理数体上の線形空間 $V(M)$ の基底を取ったことに過ぎないことがわかると思います.

そこで $\bar{f} : V(M) \to \mathbb{R}$ を定めるには, 上のような B を一つとり（複数あります), $V(M)$ の要素を $(*)$ の形に表し f を (3.1) を満たすように取っておいて

$$\bar{f}(\sum_{i=1}^{n} r_i\beta_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(\beta_i) \tag{3.2}$$

とおけばよい. また $\bar{f}(0) = 0$ とします. これで $\bar{f}$ が定まりました. 以降は簡単のため $\bar{f}$ を f と書きましょう. (3.1) (3.2) から

$$\text{任意の 有理数 } r \text{ に対して}, f(r\pi) = 0 \tag{3.3}$$

が成り立つことに注意してください.

定義 3.2. 多面体 P に対して上のように定まる集合 M と B 及び関数 $f : V(M) \to \mathbb{R}$ を一つ固定する.

$$D_f(P) = \sum_{e \text{ は } P \text{ の辺}} \ell(e)f(\theta_e) \tag{3.4}$$

を P の **Dehn 不変量**という.

例 3.3. 一辺の長さ ℓ の立方体 C を考えます. 辺 e にたいして常に $\theta_e = \pi/2$ ですから, $M_C = \{\pi, \pi/2\}$ だから $B = \{\pi\}$. *(3.3)* から f は $f(\theta_e) = 0$ を満たし, よって $D_f(C) = 0$ が成り立ちます.

Dehn の定理の肝心な部分は以下の定理に集約されます:

定理 3.4. 多面体 P が多面体 $P_1, \dots, P_n$ によって

$$P = P_1 + \cdots + P_n$$

と分割されているとする. 集合 $M_P, M_{P_1}, \dots, M_{P_n}$ 全てを含む集合 M に対して $V(M)$ を考え, 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ で *(3.1), (3.2)* によって定まるものをとる. このとき

$$D_f(P) = \sum_{i=1}^{n} D_f(P_i) \tag{3.5}$$

が成り立つ.

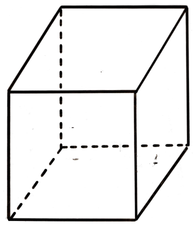

図 6: 立方体 C

この定理の証明は講座の中で触れたいと思います．これが証明されたら，次の定理が直ちに従います．

定理 3.5. 多面体 P, Q が分割合同とする．M を M_P および M_Q の両方を含み，π を要素の一つとしてもつ実数の有限集合とし，f を M によって定理 *3.4* にあるような関数とする．このとき P, Q の f に関する *Dehn* 不変量は等しい．簡単に書くと：

$$P \sim Q \Rightarrow D_f(P) = D_f(Q).$$

Proof.

$$P = P_1 + \cdots + P_N, \quad Q = Q_1 + \cdots + Q_N, \quad P_i \equiv Q_i, i = 1, \ldots, N$$

とする．P_i と Q_i は合同だから $D_f(P_i) = D_f(Q_i)$．定理 3.4 から

$$D_f(P) = \sum_{i=1}^{n} D_f(P_i) = \sum_{i=1}^{n} D_f(Q_i) = D_f(Q).$$

□

例 3.6. *1* 辺の長さが 1 の正四面体 T_1 を考えます．*2* つの面のなす角度はどれも同じです．それを θ としますと

$$\cos\theta = \frac{1}{3} \tag{3.6}$$

が成り立ちます *(*図 *7)*.

$M_{T_1} = \{\theta, \pi\}$ です．次に述べる補題から $f(\theta) = 1, f(\pi) = 0$ であるように関数 f を定めることができます．このような f に対して

$$D_f(T_1) = \sum_e \ell(e) f(\theta) = 6.$$

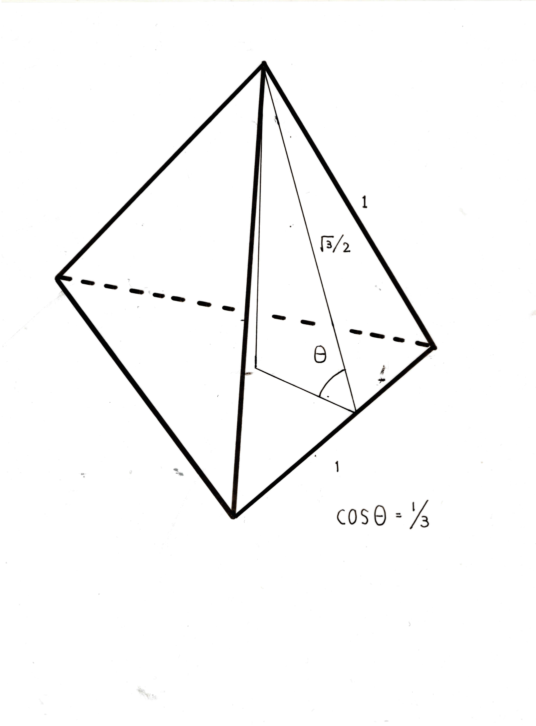

図 7: 正四面体 T_1

補題 3.7. $\cos\theta = \frac{1}{3}$ とすると，$\frac{\theta}{\pi}$ は無理数である．特に $\theta = r\pi$ を満たす有理数は存在しない．

Proof. cos に関する和積の公式：

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

を $\alpha = (k+1)\theta, \beta = (k-1)\theta$ (k は自然数) に対して使うと次が得られます：

$$\cos((k+1)\theta) + \cos((k-1)\theta) = 2\cos(k\theta)\cos(\theta) = \frac{2}{3}\cos(k\theta). \tag{3.7}$$

k についての数学的帰納法によって

$$\cos(k\theta) = \frac{A_k}{3^k} \tag{3.8}$$

を満たし, かつ 9 で割れない整数 A_k が存在する

ことを証明しましょう. $k = 1$ なら $A_1 = 1$ とすればよい. k 以下の自然数 j に対して 9 で割れない整数 A_j が定まったら, (3.7) から

$$\begin{aligned} \cos((k+1)\theta) &= -\cos((k-1)\theta) + \frac{2}{3}\cos(k\theta) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{A_k}{3^k} - \frac{A_{k-1}}{3^{k-1}} = \frac{2A_k - 9A_{k-1}}{3^{k+1}} \end{aligned}$$

だから $A_{k+1} = 2A_k - 9A_{k-1}$ とおけば, A_{k+1} は整数でかつ A_{k+1} も 9 で割れません. これで証明されました.

さて仮に $\frac{\theta}{\pi}$ が有理数だとして $\frac{\theta}{\pi} = \frac{k}{m}$, k, m は互いに素な整数, $m \geq 1$ と置きましょう. すると $\cos(m\theta) = \cos(k\pi)$ は 1 または -1 です. 一方 (3.8) から $\cos(m\theta) = \frac{A_m}{3^m}$ とかけるから

$$A_m = 3^m \text{ または } -3^m.$$

ここで A_m が 9 で割れないから $m = 1$ でなければなりません. 従って $\theta = k\pi$, k は整数, ということがわかります. しかし $\cos\theta = 1/3 \neq \pm 1 = \cos(k\pi)$ だからこれは矛盾です.

□

例 3.8. 図 7 のような三角錐 T_2 を考えます *(図 8)*. このとき面角は $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ のいずれかであることがわかります. 従って $M_{T_2} = \{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \pi\}$ です. どの面角も π の有理数倍だから, $f(\theta) = 0$ *((3.3) から)*, 従って

$$D_f(T_2) = 0$$

が成り立ちます.

定理 3.5 から

定理 3.9. *C と T_1 は分割合同でない. T_1 と T_2 は分割合同ではない.*

C, T_1, T_2 と相似な図形を適切に選ぶことによって, 体積の等しい立方体 Q と正四面体 T, 三角錐 P_1, P_2 で Dehn 不変量が異なるものを見つけることができますから, 体積が等しい多面体で分割合同でないものが得られました.

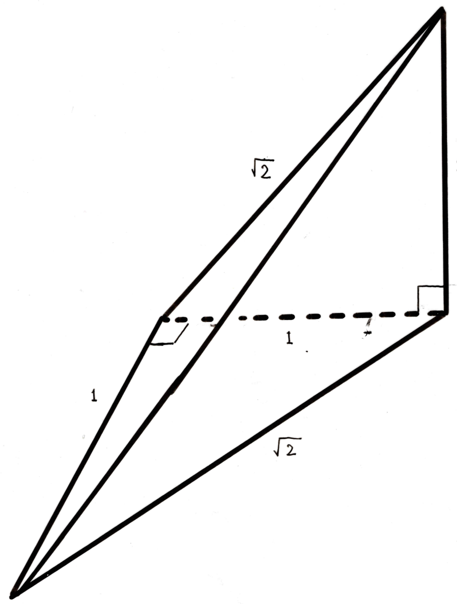

図 8: 四面体 T_2

例 3.10. 次の図のような三角錐 T_3 を考えます *(図 9)*. このとき $M_{T_3} = \{\pi, \pi/2, \phi\}$ ここで $\cos\phi = 1/\sqrt{3}$ であることがわかります. ここでは証明しませんが, ϕ/π が有理数でないことが示せますので, $B = \{\phi, \pi\}$ ととれます. $f(\phi) = 1$ とおけば,

$$D_f(T) \neq 0$$

です.

T_2 と T_3 は底面の面積も高さも等しい三角錐ですが, 定理 3.5 から分割合同ではありません. 明らかではありませんが、実は 2 つの多面体が分割合同であることと補充合同であることは同値です. 従って T_2 と T_3 は補充合同でもありません. これで Hilbert の第 3 問題に対する解答が得られました.

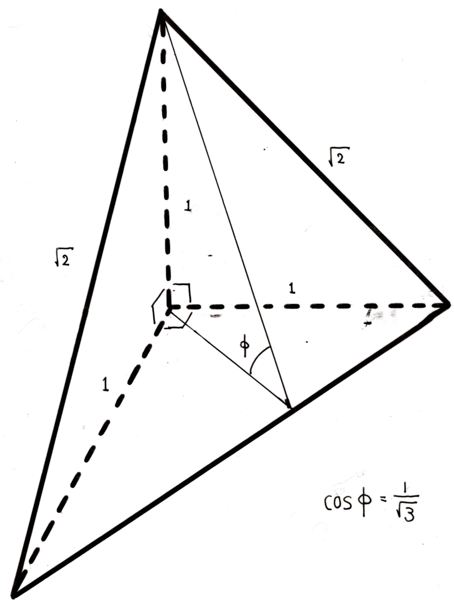

図 9: 四面体 T_3

4 Dehn の定理の先へ

Dehn の定理において中心的な役割を果たしたのは Dehn 不変量が分割合同な多面体に対して同じ値を持つということでした（定理 3.5). つまり Dehn 不変量が分割合同でない多面体を区別する役割を担っているということが大切な点でした. それでは Dehn 不変量は分割合同な多面体を区別するのに十分だろうか? つまりどんな f に対しても Dehn 不変量が等しい多面体は分割合同か?と問うことはごく自然です. 分割合同な 2 つの多面体の体積は等しいから, 次の問いが自然と生まれます:

問題. P, Q を 3 次元空間内の 2 つの多面体で, $\mathrm{Vol}(P) = \mathrm{Vol}(Q)$ かつ任意の f に対する Dehn 不変量 $D_f(P) = D_f(Q)$ を満たすとする. このとき P と Q は分割合同か?

Dehn の解決の半世紀後に上の問題が肯定的に解決しました:

定理 4.1. *(Sydler 1965)* P, Q を３次元空間内の多面体とする．以下の２条件は同値である．

(1) $P \sim Q$

(2) $\mathrm{Vol}(P) = \mathrm{Vol}(Q)$, かつ任意の f に対して $D_f(P) = D_f(Q)$.

証明は複雑で残念ながらここで述べることはできません.

以上で見てきたように,「数学的対象に何らかの量を対応させ, 対象が変化するときにその量がどう変わるかを調べる」という考え方は現代数学において非常に基本的なアプローチです．ごく身近にある疑問から数学の重要な考え方が生まれ, 現在でも大きな役割を果たしていることを感じ取っていただければ幸いです.

参考文献

[1] M. Aigner, G. Ziegler, 蟹江幸博訳　天書の証明, 原書第 6 版, 丸善出版　(2021). ただしここでは第 3 版の解説に依拠しました.

[2] V.G. Boltyanski, Hilbert's Third Problem, John Wiley and Sons, (1978).

[3] ユークリッド原論, I.L. Heiberg 編集, 中村幸四郎他訳・解説, 共立出版 (2011).