1変数ローラン級数とロンスキアン

2023 年 7 月 22 日

K を標数 0 の体とする．$K((x))$ を K の元を係数にもつ形式的ローラン級数体とする．$K((x))$ の元の線形独立性を，ロンスキアンの言葉で言い換えることができる．この事実に関する Bostan と Dumas による証明 [1] を，本ファイルで紹介する．さて，$K((x))$ の元は $f(x) = \sum_{n=-R}^{\infty} a_n x^n$ (R は非負整数，任意の $n \geq -R$ に対して，$a_n \in K$) の形をしている．これを，

$$f(x) = \sum_{n \gg -1} a_n x^n$$

のように略す．また，$f'(x) = \sum_{n \gg -1} n a_n x^{n-1}$ と定義する．すると，任意の $f(x), g(x) \in K((x))$ および $\alpha, \beta \in K$ に対して，以下が成立する：

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

さて，ℓ を正整数とし，$f_0, \ldots, f_{\ell-1} \in K((x))$ とする．このとき，$f_0, \ldots, f_{\ell-1}$ のロンスキアン $W_\ell = W_\ell(f_0, \ldots, f_{\ell-1})$ を

$$W_\ell(f_0, \ldots, f_{\ell-1}) = \det \left(\frac{1}{\mu!} \frac{d^\mu}{dx^\mu} f_\nu(x) \right)_{0 \leq \mu, \nu \leq \ell-1}$$

で定義する．

命題 1. ℓ を正整数とし，$f_0, \ldots, f_{\ell-1} \in K((x))$ とする．このとき，$f_0, \ldots, f_{\ell-1}$ が K 上一次独立であるための必要十分条件は，$W_\ell(f_0, \ldots, f_{\ell-1}) \neq 0$ となることである．

証明. $f_0, \ldots, f_{\ell-1}$ が K 上一次従属のとき，$W_\ell(f_0, \ldots, f_{\ell-1}) = 0$ となることは，明らかである．以下，$f_0, \ldots, f_{\ell-1}$ が K 上一次独立であると仮定し，

$W_\ell(f_0,\dots,f_{\ell-1}) \neq 0$ であることを示す．まず，$f(x) = \sum_{n\gg -1} a_n x^n \in K((x))$ に対して，

$$\mathrm{ord}_x f = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$$

と定める．なお，$\mathrm{ord}_x 0 = \infty$ であるが，本ファイルでは $f(x) \neq 0$ の場合だけを扱う．さて，A は，K の元を成分にもつ ℓ 次正方行列 A で，$\det A \neq 0$ を満たすとする．$f_0,\dots,f_{\ell-1}$ を並べたベクトル $(f_0,\dots,f_{\ell-1})$ を考える．

$$(g_0,\dots,g_{\ell-1}) = (f_0,\dots,f_{\ell-1})A$$

とおく．すると，任意の $\mu = 0,1,\dots,\ell-1$ に対して

$$(g_0^{(\mu)},\dots,g_{\ell-1}^{\mu}) = (f_0^{(\mu)},\dots,f_{\ell-1}^{(\mu)})A$$

である．特に，$W_\ell(f_0,\dots,f_{\ell-1}) \neq 0$ となる必要十分条件は，$W_\ell(g_0,\dots,g_{\ell-1}) \neq 0$ である．よって，

$$\mathrm{ord}_x f_0 \le \mathrm{ord}_x f_1 \le \cdots \le \mathrm{ord}_x f_{\ell-1}$$

としても一般性を失わない．さらに，必要ならば $f_j - cf_i (c \in K, j > i)$ を f_j に取り換えるという操作を繰り返すことで，

$$\mathrm{ord}_x f_0 < \mathrm{ord}_x f_1 < \cdots < \mathrm{ord}_x f_{\ell-1}$$

としても一般性を失わない．さて，$\mathrm{ord}_x f_\nu = n_\nu$ とおく $(0 \le \nu \le \ell-1)$．さらに，

$$F(x) = W_\ell(x^{n_0}, x^{n_1}, \dots, x^{n_{\ell-1}})$$

とおく．$ord_x W_\ell(f_0,\dots,f_{\ell-1})$ を考えると，$W_\ell(f_0,\dots,f_{\ell-1}) \neq 0$ を証明するためには $F(x) \neq 0$ を示せばよい．体 K の標数は 0 であった．ロンスキアンの定義より，0 ではない定数 c が存在して，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
&F(x)\\
&= c\det\left(\frac{d^\mu}{dx^\mu}x^{n_\nu}\right)_{0\le\mu,\nu\le\ell-1}\\
&= cx^{n_0+n_1+\cdots+n_{\ell-1}-\ell(\ell-1)/2}\cdot\det\big(n_\nu(n_\nu-1)\cdots(n_\nu-\mu)\big)_{0\le\mu,\nu\le\ell-1}
\end{aligned}$$

上式の最後にある行列式を $\det B$ とおく．$\det B$ の 1 行目は $(1,1,\dots,1)$ である．行列の基本変形を考えることで，$\det B$ は Vandermonde 行列式

$$\det\big(n_\nu^\mu\big)_{0\le\mu,\nu\le\ell-1} \neq 0$$

と値が一致することがわかる ($n_0 < n_1 < \cdots < n_{\ell-1}$ であった)．　□

参考文献

[1] A. Bostan and P. Dumas, Wronskians and linear independence, Amer. Math. Monthly **117** (2010), 722-727.