等比数列に関する一様分布論

金子 元

2021 年 3 月 14 日

目 次

1 本 pdf ファイルの趣旨

本 pdf ファイルでは, 等比数列に関する一様分布論に関する紹介を書く. 一様分布論では, 実数列の小数部分が取る挙動が研究対象となる. その中でも, 1 を法として一様分布な数列では, 実数列の小数部分が区間 $[0,1]$ 上で一様に分布をする (厳密な定義は 2 章で行う). 一様分布論は, エルゴード理論と密接な関係がある. エルゴード理論とは, 元は物理学から発展した分野です. エルゴード理論の研究対象は写像の反復合成である. 写像 $T:[0,1]\to[0,1]$ が与えられたとき, T^n を T の n 回反復合成とする. つまり, T^0 を $[0,1]$ 上の恒

等写像とし, $T^n(x)$ を $T^n(x) = T^{n-1}(T(x))$ により帰納的に定義する. 本ファイルでは, エルゴード定理を紹介する. 等差数列の小数部分はエルゴード理論の典型的な対象である.

一方, 等比数列の小数部分は, 一般にはエルゴード理論の対象ではない. 反復合成写像により, 等比数列の小数部分を表現できないためである.

本ファイルを通じて用いる記号

1. 実数 x に対して, 整数部分および小数部分を $\lfloor x \rfloor$ および $\{x\}$ により記述する. また, $\lceil x \rceil$ により, x 以上の整数の中で最小のものを表す. さらに, $\|x\| = \min\{|x-n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で x と最も近い整数との距離を表す.
2. $\mathbb{N}$ で非負整数全体の集合を表し, $\mathbb{Z}^+$ で正整数全体の集合を表す.

2 一様分布の定義

実数列の分布は, Bohl [2], Sierpiński [13], Weyl [15] により, 1909 年から 1910 年の間に独立に考えだされた. その後, Weyl[16, 17] により, 実数列の小数部分の一様分布に関する基礎が与えられた. 本章では, 一様分布の定義および Weyl の判定法を紹介する.

定義 2.1. $(x_n)_{n\geq 0}$ を実数列とする. このとき, $(x_n)_{n\geq 0}$ が 1 を法として一様分布する (u.d. mod 1) とは, 以下が成立することである:
$0 \leq a < b \leq 1$ を満たす任意の実数 a, b に対して,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Card}\{n \mid 0 \leq n < N,\ a \leq \{x_n\} < b\} = b - a. \tag{2.1}$$

定理 2.1 (Weyl の判定法)**.** $(x_n)_{n\geq 0}$ を実数列とする. このとき, 以下の 3 条件は互いに同値である:

1. $(x_n)_{n\geq 0}$ は u.d. mod 1.
2. 任意の複素数値連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ に対して, $f(0) = f(1)$ ならば,
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)dx. \tag{2.2}$$
3. 0 ではない任意の整数 h に対して,
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i h x_n} = 0. \tag{2.3}$$

補足 1. 1. $0 \leq a < b \leq 1$ を満たす任意の実数 a, b に対して, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を以下のように定める:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & a \leq x < b \\ 0 & \text{その他の } x. \end{cases}$$

すると, 式 (2.2) は式 (2.1) を表す. なお, この f は連続関数ではないが, 連続関数により近似をすることができる.
2. 0 ではない任意の整数 h に対して, $f(x) = e^{2\pi i x}$ とおく. すると, 式 (2.2) は式 (2.3) を表す.

Weyl の判定法の応用として, 等差数列の小数部分について考察する.

系 2.1. α を実数とする. このとき, 等差数列 $(n\alpha)_{n\geq 0}$ が 1 を法として一様分布する必要十分条件は, α が無理数となることである.

Proof. α が有理数 p/q の場合は, $\{\alpha n\} \in \{0/q, 1/q, \ldots, (q-1)/q\}$ より, $(n\alpha)_{n\geq 0}$ が 1 を法として一様分布しない.
以下, α が無理数である場合を考える. h を 0 ではない任意の整数とする. すると,

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i h\alpha n} \right| = \left| \frac{e^{2\pi i h\alpha N} - 1}{e^{2\pi i h\alpha} - 1} \right| \leq \frac{2}{|e^{2\pi i h\alpha} - 1|}$$

より, (2.3) が成立する. ここで, $e^{2\pi i h\alpha} - 1 \neq 0$ であることに注意する. よって, Weyl の判定法により, $(n\alpha)_{n\geq 0}$ は 1 を法として一様分布する. □

3　エルゴード理論と一様分布論

※本章では結果のみ紹介する. 証明については, 例えば [5] を参照のこと.
以下, 本章では $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を, コンパクト距離空間 X 上の確率空間とする. ただし, $\mathcal{B}$ を X 上の Borel 集合全体のなす集合とする.

定義 3.1. 写像 $T : X \to X$ を考える.
(1) T が (μ に関して)measure-preserving とは,
$(\forall A \in \mathcal{B})$ に対して $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ となることである. μ が T-invariant とも言う.
(2) T が ergodic とは, μ が measure-preserving かつ, 以下が成立することである: $(\forall A \in \mathcal{B})$ に対して, $T^{-1}A = A$ ならば, (μ に関して)$\mu(A) = 0$ または $\mu(A) = 1$.

例 3.1. α を実数とする. $R_\alpha : [0,1] \to [0,1]$ を $R_\alpha(x) := \{x + \alpha\}$ により定義する. このとき, R_α が $[0,1]$ 上の Lebesgue 測度に関して ergodic であるための必要十分条件は, α が無理数となることである.

前章でのべた等差数列の小数部分は, 例 3.1 の R_α と関連がある. 実際, $x \in [0,1]$ に対して, $R_\alpha^n(x) = \{x + n\alpha\}$ となる.
エルゴード理論の典型的な結果である Birkhoff の定理を述べる.

定理 3.1 (Birkhoff の定理)**.** $T : X \to X$ を $(X, \mathcal{B}, \mu)$ に関して ergodic な写像とする. また, $f : X \to \mathbb{C}$ を μ に関する可積分関数とする. すると, μ-almost everywhere な $x \in X$ に対して,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x)) = \int_X f(x) d\mu(x) \tag{3.1}$$

が成立する.

補足 2. Birkhoff の定理 (定理 3.1) において, $X = [0,1]$ かつ μ が $[0,1]$ 上の Lebesgue 測度の場合を考える. $x \in [0,1]$ に対して, $x_n = T^n(x)$ とおく. 補足 1 にある通り, 0 ではない任意の整数 h に対して (2.3) が, (Lebesgue 測度の意味で) ほとんどすべての $x \in [0,1]$ に対して成立する. すなわち, 例外集合の測度が 0 である. よって, 測度が 0 の集合の可算和も測度が 0 のため, ほとんどすべての $x \in [0,1]$ に対して, Weyl の判定法 (定理 2.1) の 3 番目の条件が成立するので, $(T^n(x))_{n\geq 0}$ は 1 を法として一様分布する.

系 3.1. α を無理数とする. すると, 任意の $x \in [0,1]$ に対して, $(R_\alpha^n(x))_{n\geq 0}$ は 1 を法として一様分布する.

Proof. $x, y \in [0,1]$ に対して, $(R_\alpha^n(x))_{n\geq 0}$ が 1 を法として一様分布することと, $(R_\alpha^n(y))_{n\geq 0}$ が 1 を法として一様分布することは同値である. よって, $0 \leq a < b \leq 1$ を満たす有理数 a, b に対して,

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [a,b)), \\ 0 & (x \notin [a,b)) \end{cases}$$

として Birkhoff の定理 (定理 3.1) を用いると, 系 3.1 が従う. □

例 3.2. a を 2 以上の整数とする. 写像 $T_a : [0,1] \to [0,1]$ を $T_a(x) := \{ax\}$ により定義する. このとき, T_a は $[0,1]$ 上の Lebesgue 測度に関して ergodic である.
$x \in [0,1)$ および $n \geq 0$ に対して, $\{a^n x\} = T_a^n(x)$ であることを帰納的に証明できる.
実際に, $n = 0$ のときは明らかである. 次に, n のときに成立すると仮定する. $a^n x = \lfloor a^n x \rfloor + \{a^n x\} = \lfloor a^n x \rfloor + T_a^n(x)$ の両辺を a 倍すると,

$$a^{n+1} x = a\lfloor a^n x \rfloor + aT_a^n(x)$$

となります. $a\lfloor a^n x \rfloor$ が整数のため, 小数部分を考えると

$$\{a^{n+1} x\} = \{aT_a^n(x)\} = T_a^{n+1}(x)$$

となる．この変形は, a が整数だからこそ成立する．a が一般の実数の場合, $a\lfloor a^n x\rfloor$ が整数とは限らないことに注意する．Birkhoff の定理 (定理 3.1) および補足 2 により, Lebesgue 測度に関してほとんどすべての実数 $x \in [0,1]$ に関して $(a^n x)_{n\geq 0}$ は 1 を法として一様分布する．

4　等比数列 $(\xi\alpha^n)_{n\geq 0}$ に関する一様分布論

4.1　ほとんどすべての実数 ξ に関する結果

等差数列が 1 を法として一様分布するための必要十分条件は, 公差が無理数となることであった．一方, 等比数列 $\xi\alpha^n$ $(n=0,1,\ldots)$ に関しては, 1 を法として一様分布するかどうかの判定は一般には難しい．また, 前章で述べた通り, 等比数列の小数部分は, 一般には反復写像によって扱うことができないため, Birkhoff の定理 (定理 3.1) を応用できない．しかし, ほとんどすべての実数に関する結果 (metrical な結果と呼ぶ) については, Weyl によって証明されている．

定理 4.1 (Weyl[17])**.** $(x_n)_{n\geq 0}$ を実数列とする．

$$\liminf_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) > 0$$

であると仮定する．すると, (Lebesgue 測度の意味で) ほとんどすべての実数 ξ に対して, $(\xi x_n)_{n\geq 0}$ は 1 を法として一様分布する．

定理 4.1 から, 以下が導かれる．

系 4.1. α を 1 より大きい実数とする．すると, (Lebesgue 測度の意味で) ほとんどすべての実数 ξ に対して, $(\xi\alpha^n)_{n\geq 0}$ は 1 を法として一様分布する．

系 2.1 の場合, 等差数列 $(n\alpha)_{n\geq 0}$ の小数部分が一様分布するための必要十分条件が述べられている．しかし, 系 4.1 の場合, どのような ξ に対して等比数列 $(\xi\alpha^n)_{n\geq 0}$ の小数部分が一様分布するかについて, 一般に記述することは難しい．α が 2 以上の自然数 a である場合は, ξ が a 進展開において正規数であることと同値であることが Wall により証明された．さて, 正規数の定義を述べる．次の定義では, 実数 ξ の a 進展開を

$$\xi = \sum_{n\geq 0}\frac{t_n(a;\xi)}{a^n}$$

と書くことにする．ただし, $t_0(a;\xi)=\lfloor\xi\rfloor$ であり, $n\geq 1$ に対して $t_n(a;\xi)\in\{0,1,\ldots,a-1\}$ とする．ここで, 無限に多くの $n\geq 1$ に対して, $t_n(a;\xi)\leq a-2$ とする．例えば, $a=10$, $\xi=0.1$ のとき, ξ の 10 進展開として $0.09999\ldots$ を採用せず, $0.10000\ldots$ を用いる．なお, ξ の a 進展開を考察していることが明らか

な場合, $t_n(a;\xi)$ を単に t_n と書く. 通常の a 進展開の記法通り, $\xi = (t_0.t_1t_2\ldots)_a$ などと書く.

また, $\ell \geq 1$ に対して, $0, 1, \ldots, a-1$ の数字を ℓ 個並べた文字列 $v_1v_2\cdots v_\ell$ のことを, $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, a-1\}$ をアルファベットに持つ長さ ℓ のワードと呼ぶ. ワード $v_1v_2\cdots v_\ell$ を単に v と書く. さらに, $N \geq 1$ に対して,

$$\lambda(\xi, v; N) = \mathrm{Card}\{1 \leq n \leq N \mid t_n(a;\xi)t_{n+1}(a;\xi)\cdots t_{n+\ell-1}(a;\xi) = v\}$$

とおく. すなわち, $\lambda(\xi, v; N)$ は ξ の a 進展開において連続する ℓ 個の digit に v が現れる回数を表している. $\mathcal{A}$ をアルファベットにもつ長さ ℓ のワードは合計 a^ℓ 通りある. ξ が a 進展開において正規数であるとは, ξ の a 進展開において, 長さ ℓ の各ワードが均等に $1/b^\ell$ ずつの割合で出現するということである.

定義 4.1. ξ を実数とする. また, a を 2 以上の整数とする.
ξ が a 進展開において正規数であるとは, 以下が成立することである:
任意の正整数 ℓ および $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, a-1\}$ をアルファベットに持つ長さ ℓ の任意のワード v に対して,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\lambda(\xi, v; N) = \frac{1}{a^\ell}.$$

定理 4.2 (Wall[14])**.** ξ を実数とする. また, a を 2 以上の整数とする.
このとき, 以下の 2 条件は同値である:

1. $(\xi a^n)_{n\geq 0}$ は 1 を法として一様分布する.

2. ξ は a 進展開に関して正規数である.

等差数列の場合, $(n\alpha)_{n\geq 0}$ の小数部分が一様分布しないような (例外集合の)α を考察する. このとき, α は有理数であるため, 等差数列の小数部分は周期的となる. 一方, 公比が 1 より大きい実数 α である等比数列を考察する. $(\xi\alpha^n)_{n\geq 0}$ の小数部分が一様分布しないような (例外集合の)ξ には, 興味深い数も含まれる. このような例外集合を考察することが本プリントの目標である. なお, 各公比 $\alpha > 1$ に対して, 例外集合は空集合ではないことが知られている.

なお, 公比ではなく初項 ξ を固定する場合も, (Lebesgue 測度の意味で) ほとんどすべての実数 $\alpha > 1$ に対して $(\xi\alpha^n)_{n\geq 0}$ の小数部分が一様分布する. この事実は, Koksma による判定法 [9](具体的な内容は割愛) によって得られる.

4.2 例外集合

4.1 節で述べた通り, $\alpha > 1$ を固定するとき, 等比数列 $(\xi\alpha^n)_{n\geq 0}$ の小数部分が一様分布しないような (例外集合の)ξ について考察する. そのために, Pisot 数などの用語を導入する. α を複素数とする. α が代数的数とは, 0 ではない

$f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ が存在して, $f(\alpha) = 0$ となることである. $f(\alpha) = 0$ を満たす多項式 $f(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ $(a_d \neq 0)$ で, 次数最小, なおかつ $a_d > 0$ と $\gcd(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0) = 1$(最大公約数) を満たすものが唯一つ存在する. この唯一つの多項式を α の最小多項式と呼ぶ. α の最小多項式を $P_\alpha(X)$ で表す. $P_\alpha(X)$ の次数を α の次数と呼び, $P_\alpha(X) = 0$ の根を α の共役と呼ぶ[1]. 例えば, $\alpha = 1/\sqrt{3}$ は次数 2 の代数的数であり, 最小多項式は $3X^2 - 1$ である (環論や体論で学ぶ最小多項式とは少し定義が異なるので注意). また, α の共役は $\pm 1/\sqrt{3}$ である. また, α が代数的整数とは, 最高次係数が 1 である (monic な)$f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ が存在して, $f(\alpha) = 0$ となることである. 実は, 代数的数 α に対して, α が代数的整数となることと, α の最小多項式 $P_\alpha(X)$ が monic であることは同値である. よって, $\sqrt{3}$ は代数的整数であるが, $1/\sqrt{3}$ は代数的整数ではないことがわかる.

なお, 代数的数ではない複素数のことを超越数と呼ぶ (7 章で用いる).

定義 4.2. $\alpha > 1$ を代数的整数とし, その共役を $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ とする.
(1) α が Pisot 数であるとは, $2 \leq i \leq d$ なる任意の i に対して $|\alpha_i| < 1$ となることである.
(2) α が Salem 数であるとは, 以下が成立することである: $2 \leq i \leq d$ なる任意の i に対して $|\alpha_i| \leq 1$ かつ, $2 \leq j \leq d$ なる j が存在して, $|\alpha_j| = 1$.

例 4.1. (1) 2 以上の整数 b は Pisot 数である. また, $(\sqrt{5}+1)/2$ は Pisot 数である.
(2) $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1 = 0$ の解 α で, $\alpha > 1$ を満たすものは唯一つ存在するが, これは Salem 数である.

命題 4.3. α を Pisot 数とする. このとき, $\lim_{n\to\infty} \|\alpha^n\| = 0$ が成立する.

Proof. $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ を α の共役とする. すると, 非負整数 n に対して, $\alpha_1^n + \alpha_2^n + \cdots + \alpha_d^n \in \mathbb{Z}$ である. よって, α は Pisot 数であるため

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha^n\| = \lim_{n\to\infty} \|\alpha_2^n + \cdots + \alpha_d^n\| = 0$$

である. □

なお, Salem 数に関しては, 以下の事実が知られている (証明は割愛).

命題 4.4. α は Salem 数であるとする. このとき, $(\{\alpha^n\})_{n\geq 0}$ は $[0,1]$ において稠密である. しかし, $(\alpha^n)_{n\geq 0}$ は 1 を法として一様分布しない.

例外集合の元 ξ に対して, $(\xi\alpha^n)_{n\geq 0}$ は 1 を法として様々な挙動をとる (命題 4.3 および命題 4.4 では $\xi = 1$). 特に, α が Pisot 数であるとき, 等比数列と最短整数の距離 $\|\xi\alpha^n\|$ を考察する. すると, 最大極限点 $\limsup_{n\to\infty} \|\xi\alpha^n\|$ が興味深い挙動を示すことが判明した. 特に, この最大極限点は Lagrange

[1] 複素共役と区別するときは Galois 共役と呼ぶ

spectrum と呼ばれる対象と類似した性質を持つことが分かったので, 7 章で紹介する. そのために, 5 章で連分数および連分数展開における正規数を紹介し, さらに 6 章で badly approximable number と Lagrange spectrum について紹介する.

5 連分数および連分数展開における正規数

5.1 連分数の定義と有理近似誤差

a を 2 以上の整数とする. 3 章で定義した通り, $x \in [0,1)$ に対して, $T_a(x) := \{ax\}$ とおく. すると, 実は $\xi \in [0,1)$ の a 進展開 $\sum_{n\geq 1} t_n/a^n$ における digit は, 以下のように求めることができる: $t_n = \lfloor aT_a^n(\xi) \rfloor$. 本章では, ガウス写像を通じて, 実数の正則連分数展開を定義する. この展開は, 実数の有理近似と関連が深い. ここでは, 簡略化のため無理数の正則連分数展開のみ考察し, 以下連分数は正則連分数のことを表す.

ガウス写像 $T_G : [0,1] \to [0,1]$ を以下のように定義する: $x \in [0,1]$ に対して, $T_G(x) := \{1/x\}$. 簡略化のため, $I' := [0,1]\backslash\mathbb{Q}$ と置く. $x \in I'$ に対して, $(a_n)_{n\geq 0} = (a_n(x))_{n\geq 0}$ を以下のように定義する:

$$a_n(x) := \left\lfloor \frac{1}{T_G^{n-1}(x)} \right\rfloor .$$

ここで, 任意の $n \geq 1$ に対して $a_n(x)$ は正整数であることに注意する.

$$x = \lim_{n\to\infty} \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} \tag{5.1}$$

が成立することが知られている. ただし, $p_n/q_n = p_n(x)/q_n(x)$ は既約分数とする. p_n/q_n を x の n 次近似連分数と呼ぶ. 等式 (5.1) を,

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

で表す. 連分数展開と実数の有理近似は, 次の定理のような関連がある:

定理 5.1. $x \in I'$ とする. (1) 任意の $n \geq 1$ に対して,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

(2) $a/b \in \mathbb{Q}$ $(a, b \in \mathbb{Z}, b \geq 1)$ とする.

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$$

ならば, $n \geq 1$ が存在して, $a/b = p_n/q_n$.

定理 5.1 により, 実数の有理数による近似誤差と, 実数の連分数展開は密接に関連がある. したがって, 連分数展開における digit の列 $(a_n(x))_{n\geq 1}$ の挙動が重要である. では, 実数 x に対して digit の列 $(a_n(x))_{n\geq 1}$ はどのような挙動を示すであろうか. 次の節で, metrical な結果を述べる.

5.2 連分数展開における正規数

実数の a 進展開における正規数と同様に, 実数の連分数展開における正規数も定義することができる. そのために, ガウス写像に対する不変測度を紹介する.

$[0,1]$ 上の Borel 可測集合 $A \in \mathcal{B}$ に対して, $\mu_G(A)$(A の Gauss 測度) を以下のように定義する;

$$\mu_G(A) := \frac{1}{\log 2}\int_A \frac{1}{1+x}dx.$$

Gauss は 1845 年に, μ_G が T_G-invariant な確率測度であることを発見した. なお, T_G は μ_G に関して ergodic である.

さて, $\ell \geq 1$ に対して, 正整数を ℓ 個並べた文字列 $v = v_1 \dots v_\ell$ を $\mathbb{Z}^+$ をアルファベットにに持つ長さ ℓ のワードと呼ぶ. これに対して, I' の部分集合 $C[v]$ を以下のように定める.

$$C[v] := \{x \in I' \mid v = a_1(x)a_2(x)\cdots a_\ell(x)\}.$$

a 進数における正規数の定義では, ワード v の出現率を $b^{-\ell}$ で定義したが, 連分数における正規数の定義ではワード v の出現率を $\mu_G(C[v])$ で定義する.

定義 5.1. $x \in I'$ とする. x が連分数展開において正規数であるとは, 以下が成立することである: 任意の $\ell \geq 1$, および $\mathbb{Z}^+$ をアルファベットにに持つ長さ ℓ の任意のワード v に対して,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathrm{Card}\{1 \leq n \leq N \mid a_n(x)a_{n+1}(x)\cdots a_{n+\ell-1}(x) = v\} = \mu_G(C[v])$$

が成立する.

定理 5.2. μ_G の意味で (したがって Lebesgue 測度の意味で) ほとんどすべての $x \in I'$ に対して[2], x は連分数展開において正規数である.

Proof. v を $\mathbb{Z}^+$ をアルファベットにに持つ長さ ℓ のワードとする. 非負整数 m に対して,

$$T_G^n(x) = \cfrac{1}{a_{m+1} + \cfrac{1}{a_{m+2} + \cfrac{1}{a_{m+3} + \ddots}}}$$

[2] $\mu_G([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 0$ より, 無理数のみを考察する

である． よって，正整数 n に対して，$a_n(x)a_{n+1}(x)\cdots a_{n+\ell-1}(x) = v$ と $T^{n-1}(x) \in C[v]$ は同値である．$x \in [0,1]$ に対して，

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in C[v] \\ 0 & \text{その他の } x \end{cases}$$

とおく．Birkhoff の定理 (定理 3.1) により，ほとんどすべての $x \in I'$ に対して

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Card}\{1 \le n \le N \mid a_n(x)a_{n+1}(x)\cdots a_{n+\ell-1}(x) = v\} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x)) \\ &= \int_X f(x) d\mu_G(x) = \mu_G(C[v]) \end{aligned}$$

が成立する．$\mathbb{Z}^+$ をアルファベットにに持つ長さ ℓ のワード全体の集合は可算集合であるため，定理 5.2 が示された． □

系 5.1. j を正整数とする．すると，μ_G の意味で (したがって Lebesgue 測度の意味で) ほとんどすべての $x \in I'$ に対して，digit の列 $(a_n(x))_{n\ge1}$ に j が現れる頻度は

$$\frac{2\log(1+j) - \log j - \log(2+j)}{\log 2}$$

である．

Proof. 長さ 1 のワード j を考えると，$C[j] = ((j+1)^{-1}, j^{-1})\backslash\mathbb{Q}$ である．よって，

$$\begin{aligned} \mu_G([j]) &= \frac{1}{\log 2} \int_{1/(j+1)}^{1/j} \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{2\log(1+j) - \log j - \log(2+j)}{\log 2} \end{aligned}$$

である．したがって，定理 5.2 より系 5.1 が示された． □

連分数展開において，正規数ではない x(例外集合) の中にも興味深い数がある．次の章では badly approximable number と呼ばれる数について紹介する．

6 Badly approximable number と Lagrange spectrum

6.1 Badly approximable number と有理近似

この章では，5 章と同じ記法を用いる．特に，$x \in I'$ の連分数展開における digit を $(a_n(x))_{n\ge1}$ と書く．

定義 6.1. $x \in I'$ とする．$(a_n(x))_{n\geq 1}$ が有界な数列となるとき, x が badly approximable number という．

Badly approximable number について解説するために, 定理 5.1 を詳細にしたものを紹介する．そのために, 正整数の無限列 $(b_n)_{n\geq 1}$ 及び非負整数 b_0 に対して,

$$[b_0; b_1, b_2 \dots, b_n] := b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_n}}}},$$

$$[b_0; b_1, b_2, b_3, \dots] := b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \ddots}}}$$

という記号を用いる．

定理 6.1 (Perron, 1921)**.** $x \in I'$ とする．また, $n \geq 1$ とする．このとき, x と n 次近似分数 p_n/q_n の誤差は以下のように与えられる:

$$q_n^2 \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{[0; a_n, a_{n-1} \cdots, a_1] + [a_{n+1}; a_{n+2}, a_{n+3}, \dots]}. \tag{6.1}$$

定理 6.1 および定理 5.1 の (2) より, 以下が分かる:

系 6.1. $x \in I'$ とする．すると, x が badly approximable であるための必要十分条件は, ある正定数 C が存在して, 以下が成立することである．任意の有理数 a/b $(a, b \in \mathbb{Z}, b \geq 1)$ に対して,

$$b^2 \left| x - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{1}{C}. \tag{6.2}$$

具体例として, Hurwitz に依る結果を紹介する: $x = (1+\sqrt{5})/2$ の場合を考える．ε を任意の正の実数とするとき,

$$b^2 \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}+\varepsilon}$$

を満たす有理数 a/b は有限個である．一方, 任意の $x \in I'$ に対して,

$$b^2 \left| x - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

を満たす有理数 a/b は無限に多く存在する．

以上を踏まえて, badly approximable number x に対して, 以下で定義される $\rho(x)$ の値を考察する:

$$\sup \left\{ D > 0 \,\middle|\, \text{無限に多くの有理数 } \frac{a}{b} \text{ に対し，} \left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{Db^2} \right\}.$$

例えば, $\rho((1+\sqrt{5})/2)=\sqrt{5}$ である． また, 任意の badly approximable number x に対して, $\rho(x)\geq\sqrt{5}$ である．

一方,

$$b^2\left|x-\frac{a}{b}\right|=b|bx-a|$$

において, $|bx-a|=\|bx\|$ を満たすような整数 a を取る．すると, $\rho(x)$ は, 以下のように言い換えられる:

$$\rho(x):=\left(\liminf_{n\to\infty} n\|nx\|\right)^{-1}.$$

Badly approximable number に対する $\rho(x)$ 全体の集合

$$\mathbb{L}=\{\rho(x)\mid x(\in I') \text{ は badly approximable number}\}$$

は Lagrange spectrum と呼ばれる．これは $[\sqrt{5},\infty)$ の部分集合であるが, 幾何学的に興味深い集合であることが知られている．Lagrange spectrum に関して知られている結果を次の節で紹介する．

6.2 Lagrange spectrum に関連する結果

まずは, $\mathbb{L}$ の位相的な性質を紹介する．

定理 6.2 (Cusick[3])**.** $\mathbb{L}$ は $\mathbb{R}$ における閉集合である．

次に, $\mathbb{L}$ において, discrete part と呼ばれる部分集合を紹介する．

定理 6.3 (Markoff[10])**.** $\mathbb{L}\cap[\sqrt{5},3)$ は離散集合である．また, $3\in\mathbb{L}$ は $\mathbb{L}$ の最小の集積点である．さらに, $\mathbb{L}\cap[\sqrt{5},3)$ は以下のように記述することができる:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}\cap[\sqrt{5},3)&=\left\{\sqrt{9-\frac{4}{z_n^2}}\;\middle|\; n=0,1,\ldots\right\}\\&=\left\{\sqrt{5}<\sqrt{8}<\frac{\sqrt{221}}{5}<\cdots\right\}.\end{aligned}$$

ただし, $(z_n)_{n\geq 0}$ は Markoff 数, すなわち, 以下の性質を満たす正整数である: 正整数 $x,y(x\leq y\leq z_n)$ で $x^2+y^2+z_n^2=3xyz_n$ を満たすようなものが存在する．

定理 6.3 とは対比的に, Hall[7] は $[6,\infty)\subset\mathbb{L}$ であることを示した (特に, $\mathbb{L}$ には区間が含まれ, Hall's ray と呼ばれる)．この結果の精密化を紹介する．

定理 6.4 (Freĭman[6])**.** $\mathbb{L}\supset[c,\infty)$ を満たす最小の実数 c_F は

$$c_F=\frac{2221564096+283748\sqrt{462}}{491993569}=4.527829566\ldots$$

である．

最後に, discrete part と Hall's ray の中間部分を説明するために, Hausdorff 次元を考察する. ここでは Hausdorff 次元の詳細な定義は述べないが, $\mathbb{R}$ の部分集合の大きさを測るものである. $\mathbb{R}$ の部分集合 S に対して, その Hausdorff 次元を $d_H(S)$ と書く. すると, $0 \leq d_H(S) \leq 1$ であり, S が可算集合の場合は $d_H(S) = 0$ である. また, S の Lebesgue 測度が正の場合は $d_H(S) = 1$ である. さて, $t \geq \sqrt{5}$ に対して, $d(t) := d_H(\mathbb{L} \cap [3, t])$ と置く.

定理 6.5 (Moreira[11])**.** (1) 任意の正の実数 ε に対して, $d(3+\varepsilon) > 0$ である.
(2) $d(\sqrt{12}) = 1$ である. ※ $\sqrt{12} = 3.4641016151377\ldots$.
(3) $d(t)$ は t に関する連続関数である.

定理 6.2, 定理 6.3 および定理 6.4 の類似が等比数列に関する一様分布に対しても成立する, という結果が論文 [1] の主な内容である. 詳細は 7 章で解説する.

7 等比数列の小数部分に関する Lagrange spectrum の類似

本章の結果を述べる前に, 単数の定義を述べる: 代数的整数 α が単数であるとは, 最小多項式 $P_\alpha(X)$ の定数項が 1 または -1 となることと定義する. 実は, 代数的整数 α に対して, α が単数であることと, α^{-1} が代数的整数であることは同値な条件である.

4 章と同様に等比数列 $(\xi\alpha^n)_{n\geq 0}$ に関する一様分布論を考察する. 本章では公比 $\alpha > 1$ を固定する. 系 4.1 によると, Lebesgue 測度の意味でほとんどすべての実数 ξ に対して, $(\xi\alpha^n)_{n\geq 0}$ は 1 を法として一様分布するのであった. この例外集合の元 ξ に対して, 1 を法とした $(\xi\alpha^n)_{n\geq 0}$ の挙動を調べる. 特に, 最大極限点 $\limsup_{n\to\infty} \|\xi\alpha^n\|$ について考察する. 最大極限点全体を集めた集合 $\mathcal{L}(\alpha)$ を以下のように定義する:

$$\mathcal{L}(\alpha) := \left\{ \limsup_{n\to\infty} \|\xi\alpha^n\| \mid \xi \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathcal{L}(\alpha)$ は区間 $[0, 1/2]$ の部分集合である. 実は, α が Pisot 数のとき, $\mathcal{L}(\alpha)$ に興味深い性質が成立する. 特に, $\alpha(> 1)$ が整数, または単数で次数が 2 のもの (2 次の単数と呼ぶ)[3]のとき, $\mathcal{L}(\alpha)$ は Lagrange spectrum $\mathbb{L}$ と類似の性質を持つということが判明した. 以下, 論文 [1] の結果を述べる. まず, 一般の Pisot 数 α に対して成立する性質を紹介する:

定理 7.1. α が Pisot 数のとき, $\mathcal{L}(\alpha)$ は区間 $[0, 1/2]$ の閉部分集合である.

[3] 1 より大きい 2 次の単数は Pisot 数である.

次に, α が 2 以上の整数 a または 2 次の単数, つまり $X^2-bX\pm1=0(b\in\mathbb{Z})$ の場合を考える．技術的な理由により, $\alpha>3$ という条件を仮定する．すると, 後者に対しては, $\alpha=(b+\sqrt{b^2\mp4})/2$ である．また, α の共役を α,α_2 と書くと, $\alpha_2=\pm\alpha^{-1}$ である．さて, $\mathcal{L}(\alpha)$ の Discrete part に関する結果を述べる．まず, α が 2 以上の整数の場合を考える．非負整数 k に対して,

$$E^{(k)}(X):=\frac{1+X^{2^k}-(1-X)\prod_{m=0}^{k-1}(1-X^{2^m})}{2X(1+X^{2^k})}$$

とおき,

$$E(X):=\frac{1-(1-X)\prod_{m=0}^{\infty}(1-X^{2^m})}{2X}$$

とおく．次の定理の証明には, Dubickas[4] によるアイディアを本質的に用いる．特に, 最小の極限点は Dubickas[4] によって得られた．

定理 7.2. a を 2 以上の整数とする．すると, $\mathcal{L}(a)\cap[0,a^{-1}E(a^{-1}))$ は離散集合である．また, $a^{-1}E(a^{-1})$ は $\mathcal{L}(a)$ の最小の集積点である．さらに, discrete part を以下のように記述することができる:

$$\mathcal{L}(a)\cap\left[\frac{1}{a}E\left(\frac{1}{a}\right)\right)=\left\{\frac{1}{a}E^{(k)}\left(\frac{1}{a}\right)\;\middle|\;k=0,1,2,\dots\right\}.$$

次に, α が 2 次の単数の場合を考える．簡単のために, α の共役が α^{-1} の場合のみを記述するが, α の共役が $-\alpha^{-1}$ の場合も同様の結果が成立する．$\alpha>3$ は $\alpha^2-b\alpha+1=0$ を満たすとする．ただし, b は正整数とする．さて, $\alpha>3$ は $\alpha^2-b\alpha+1=0$ を満たすとする．ただし, b は正整数とする．このとき, 実は以下の等式が成立する:

$$\frac{1}{1+\alpha}=\cfrac{1}{1+b-\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{\ddots}}}} \tag{7.1}$$

さて, (7.1) の右辺を $[0;1+b,b,b,b,\dots]_{neg}$ と書くことにする．また, (7.1) の右辺を n 番目の箇所で打ち切ったものを

$$\frac{P_n}{Q_n}:=[0;\underbrace{1+b,b,b,b,\dots,b}_{n}]_{neg}$$

と書く．さらに,

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}}=\frac{P_n}{Q_n},\quad \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}=\frac{P_{n-1}+P_n}{Q_{n-1}+Q_n}$$

とおく．すると, $\mathcal{L}(\alpha)$ の discrete part はこの有理数 p_n/q_n を使って書くことができる．

定理 7.3. $\alpha > 3$ は $\alpha^2 - b\alpha + 1 = 0$ を満たすとする．ただし, b は正整数とする．すると, $\mathcal{L}(\alpha) \cap [0, (1+\alpha)^{-1})$ は離散集合である．また, $(1+\alpha)^{-1}$ は $\mathcal{L}(\alpha)$ の最小の集積点である．さらに, discrete part を以下のように記述することができる:

$$\mathcal{L}(\alpha) \cap \left[0, \frac{1}{1+\alpha}\right) = \left\{ \frac{p_n}{q_n} \;\middle|\; n = 0, 1, 2, \ldots \right\}.$$

補足 3. a を 2 以上の整数とする．すると, 定理 7.2 により, $\mathcal{L}(a)$ の最小の集積点は $a^{-1}E(a^{-1})$ であった．さて, $E(X)$ の定義には無限積 $\prod_{m=0}^{\infty}(1 - X^{2^m})$ が用いられている．この無限積は, Mahler 関数と呼ばれている特殊な関数である．Mahler 関数の特殊値の超越性に関する理論 (例えば, 文献 [12] を参照のこと) により, $a^{-1}E(a^{-1})$ は超越数である．

一方, 定理 7.3 に現れる最小の集積点 $(1+\alpha)^{-1}$ は代数的数である．なお, $\mathcal{L}(\alpha)$ を考察するために, $\|\xi\alpha^n\|$ に関する公式が論文 [1] に記述されている[4].

次に, Hall's ray の類似について考察する．実は, α が整数の場合と 2 次の単数の場合で, 異なる結果が生じる．

定理 7.4. (1) a を 2 以上の整数とする．すると, 任意の正の実数 δ に対して $\dim_H(\mathcal{L}(a) \cap [0, -\delta + 1/2)) < 1$ である．特に, $\mathcal{L}(a)$ のルベーグ測度は 0 であり, $\mathcal{L}(a)$ は正の長さの区間を含まない．
(2) α を 2 次の単数とし, $\alpha > 3$ と仮定する．すると, ある $\delta > 0$ が存在して, $[1/2 - \delta, 1/2] \subset \mathcal{L}(\alpha)$ である．

参考文献

[1] Shigeki Akiyama and Hajime Kaneko, *Multiplicative analogue of Markoff-Lagrange spectrum and Pisot numbers*, to appear in Adv. Math.

[2] P. Bohl. *Über ein in der Theorie der säkutaren Störungen vorkommendes Problem*, J. reine angew. Math. **1**35 (1909), 189–283.

[3] T. W. Cusick, *The connection between the Lagrange and Markoff spectra*, Duke Math. J. **42** (1975), no. 3, 507–517.

[4] A. Dubickas, *On the distance from a rational power to the nearest integer*, J. Number Theory **117** (2006), no. 1, 222–239.

[5] M. Einsiedler and T. Ward. *Ergodic Theory with a View towards Number Theory*, Springer, London, 2011, **2**59.

[4] α が Pisot 数に関する場合に限られた公式である．より一般の代数的数 $\alpha > 1$ に対する $\|\xi\alpha^n\|$ の公式については [8] 参照.

[6] G. A. Freĭman, *Diophantine approximations and the geometry of numbers (Markov's problem)*, Kalinin. Gosudarstv. Univ., Kalinin (Russian), 1975.

[7] M. Hall, Jr., *On the sum and product of continued fractions*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 966–993.

[8] H. Kaneko, *Limit points of fractional parts of geometric sequences*, Unif. Distrib. Theory **4** (2009), no. 2, 1–37.

[9] J. F. Koksma, *Ein mengen-theoretischer Satz über Gleichverteilung modulo eins*, Compositio Math. **2** (1935), 250-258.

[10] A. Markoff, *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies*, Math. Ann. **17** (1880), 379–399.

[11] C. G. Moreira, *Geometric properties of the Markov and Lagrange spectra*, Ann. of Math. **188** (2018), 145–170.

[12] K. Nishioka, Mahler Functions and Transcendence, in: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1631, Springer, Berlin, 1996.

[13] W. Sierpiński, *Sur la valeur asymptotique d'une certaine somme*, Bull Intl. Acad. Polonmaise des Sci. et des Lettres (Cracovie) (1910), 9–11.

[14] D. D. Wall, *Normal numbers*, Ph. D. thesis (1949), University of California, Berkeley.

[15] H. Weyl, *Über die Gibbssche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene*, Rend. Circ. Mat. Palermo **3**0 (1910), 377–407.

[16] H. Weyl, *Über ein Problem aus dem Gebiete der diophantischen Approximationen."* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1914), 234–244. Reprinted in Gesammelte Abhandlungen, Band I. Berlin: Springer-Verlag (1968), 487–497.

[17] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Ann. **7**7 (1916), 313–352.