超越数論と関連のある線形代数の問題

金子 元

2021 年 1 月 11 日

1 線形独立性を用いた超越性の言い換え

$\mathbb{N}$ で非負整数全体の集合を表します. このとき, 以下の定理が成立します. $\xi \in \mathbb{C}$ に対して, ξ が超越数であることとは, 集合 $\{\xi^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立であることです.

定理 1.1. S を空ではない $\mathbb{N}$ の部分集合とします.
(1) S が無限集合と仮定します. また, $\xi \in \mathbb{C}$ とします. すると, 以下の 2 条件は同値です.

条件 1. ξ は超越数.

条件 2. 集合 $\{\xi^n \mid n \in S\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立.

(2) S が有限集合の場合, 条件 2 を満たす代数的数 $\xi \in \mathbb{C}$ が存在します.

Proof. (1) 条件 1 が成立すれば, 明らかに条件 2 は成立します. よって, 条件 2 から条件 1 を導けばよいです. ξ が代数的数であると仮定して矛盾を導きます. $\mathbb{Q}(\xi)$ の $\mathbb{Q}$ 上拡大次数を $d = [\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}]$ と置きます. $S = \{s(0) < s(1) < \cdots\}$ と置きます. すると, 拡大次数を考察することで, $\{\xi^{s(0)}, \xi^{s(1)}, \ldots, \xi^{s(d)}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形従属であることとなり, 条件 2 に反します. よって, (1) が示されました.
(2) S の最大限を D とします. すると, 次数が D より大きい代数的数は条件 2 を満たします. □

2 代数的独立性と関連のある線形代数の問題 (主な問題)

$\xi, \eta \in \mathbb{C}$ に対して, ξ, η が ($\mathbb{Q}$ 上) 代数的独立であるとは,
集合 $\{\xi^n \eta^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立であることです.

問題 2.1. 以下の性質を満たす空ではない $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の部分集合 S を特徴付けよ:
任意の $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ に対して, 以下は同値:

条件 1. ξ, η は ($\mathbb{Q}$ 上) 代数的独立.

条件 2. 集合 $\{\xi^n \eta^m \mid (n, m) \in S\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立.