

学び始める前に：Lebesgue 積分は何ではないか

Lebesgue 積分が何であるかは、この講義を最後まで受ければわかると思う。しかし、一般的に数学科の講義の中で、Lebesgue 積分（とくにその基礎となる測度論）は評判が悪く、よくわからないという声も聞く。その原因と思われることで、私自身が理論を勉強する前に知っておきたかったと思うことを、いくつかまとめておく。ここに書いたことがわからなくても、理論の理解には影響しないので、心配しないでほしい。履修を途中で止めてしまう人を減らすための、精神的ケアを目的とした小文である。

とりあえず、一言でいうと [4] に書かれている

数学者は、繊細なアイデアよりも巧妙なアイデアを、理解しやすく楽しみやすいと感じる。測度論は巧妙というより繊細なので、習得するのに多大な努力を要するのである。

Mathematicians find it easier to understand and enjoy ideas which are clever rather than subtle. Measure theory is subtle rather than clever and so requires hard work to master.

が全てである。しかし、これから学ぶ人にはこれだけでは何も伝わらないだろうから、以下で説明を加える。

まずこの文は、clever と subtle を対比させているあたりが、それぞれの語感をよく知らないで、わかりにくい^{*1}。ここでの「繊細」の意味は、微妙なバランスの上に成り立っている、という意味である。そして実際に Lebesgue 積分の理論は、そのような側面を持っている。

まず、Lebesgue 積分は面積の概念の見直しを含む。見直した面積の概念を使って、「微小領域の面積 × 関数値」の和である積分を定義し直すのである。こういう見直しが始まると、数学を学ぶ者の常として、どこまで徹底的にできるのかが気になる。しかし、Lebesgue 積分論はその方向の究極の理論ではない。可算加法性という、通常のアリーゲル概念より強い性質をもった「測度」が、ある程度広いクラスの集合に対して定義できることで満足する。一方で、ここを有限加法性という性質で満足するならば、面積は全ての平面の部分集合に対して定義できることが知られている [5, Section 4.3]^{*2}。可算加法的な測度にこだわるのは、それに基づいて展開した Lebesgue 積分論が、極限操作との相性が良い、使いやすいものになるからである。

次に、Lebesgue 自身も明言していることとして、Lebesgue 積分は微積分学の基本定理の拡張を一つの目的にしている。Riemann 積分の枠組みでの不満については、詳しくは第 1 章で述べる。しかし、ここでも Lebesgue 積分論は究極の理論ではない。Denjoy–Perron–Henstock–Kurzweil 積分（HK 積分と略記することが多い）というものがあって、少なくとも $\mathbb{R}$ 上の関数に限っては、「微分可能な関数の導関数は HK 可積分であり、HK 積分すると元の関数に戻る」という、微積分学の基本定理が一般に成立する。Lebesgue 積分の枠組みでは、関数に絶対連続性と呼ばれる性質を追加で仮定しないと、同じ定理は成立しない。しかし、一方で HK 積分は変数変換に対する振

^{*1} 数学者の一般的指向と「繊細」のここでの意味については、A. Weil（訳：杉浦光夫）、『数学の創造』（日本評論社）[1940 d] も参考になると思う。

^{*2} ただし、これを面積の究極の理論だと思っている人もほとんどいないと思う。そもそも、拡張に一意性がない。

る舞いが良くないという欠点を抱えている。ここでも Lebesgue 積分は、それが別の点で使いやすいという理由で、標準的な積分論としての地位を得ているのである。

最後に、Lebesgue 積分論は、同じように使い勝手の良い積分論を構築する唯一の方法ではない。最初に述べた面積概念の拡張である「測度」を経由せずに、積分概念を直接拡張する道筋も Daniell によって提唱され、結局は本質的に同じ積分論ができることが知られている [11]。そして、少なくともある時期には、Daniell 積分論を Lebesgue 積分論に代わって教えるべきだという議論がされた程度には、両者は優劣のつけがたいものである。例えば、極限操作に相性の良い積分論を作るだけなら、Daniell 積分論の方が手早くできる。しかし、Daniell 積分から測度を作る過程にはやや面倒な問題があり、最終的に測度も欲しいという視点では、Lebesgue 積分の方が明晰である。

ともかく、これだけの「ではない」がついて回ることから、Lebesgue 積分論は言うまでもなく自然な理論ではない^{*3}。上の三つの段落のそれぞれの目的のためには、より良い理論があるのである。しかし面積の概念を一般化しつつ、微積分学の基本定理を十分一般的な範囲まで拡張し、さらに極限操作と相性の良い積分論を構築する、という三つの目的を総合して考えたときには、Lebesgue 積分論は最も優れた理論と言える。つまり、全体のバランスを考慮しつつ、局所的には敢えて徹底しないことで、総合的に優れた理論になっているという、いわば綱渡りの産物なのである。この際どい綱渡りのことを、Körner は subtle という言葉で表したのだと思う。

以上のことを前提にすると、Lebesgue 積分を学ぶ際には、新しい概念や定義の意義がすぐにわかることを期待すべきではない、ということがわかると思う。例えば講義の序盤で現れる「測度の可算加法性」の意義など、その時点でいくら考えてもわかりようがないのである。それを基にして積分論が手際よく展開でき、Riemann 積分の問題点がいくつも解消するのを見届けて、初めてそう定義しておいた意義がわかるのである。こういうことは、どんな数学の理論でも多かれ少なかれあると思うが、上記のような背景があって、Lebesgue 積分論はそれがやや極端である。しかし、そういうものだとかあらかじめ知っていれば、精神的ストレスの軽減にはなると思うので、このように説明をしてみた。あまり早い段階で「意味がわからない」と思って諦めることがないように願っている。それは、あなたが悪いわけではないのだから。

注意. このノートの中には、ときどき確という記号が現れる。これは、そこに多少の論理の飛躍があり、「各自確認せよ」という意味である。またその他に、

このように左に灰色の縦線が入っているところ

がある。これは、時間の都合で講義では詳しく説明しない予定の部分である。

^{*3} ある程度数学に慣れた人には、「canonical ではない」と言った方が感じが伝わるかも知れない。