Fixing the functoriality of Khovanov homology ~ a simple approach

(arXiv : 2008.02131)

佐野 岳人 @ 東大数理 D2

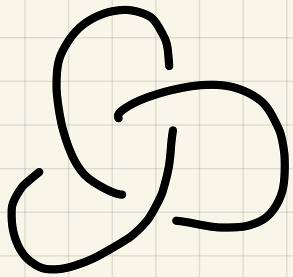
2020-09-03, 微分トポロジー20

Contents

Khovanov homology とは?

- Jones 多項式の"圏論化".

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{Khovanov homology}} \arrow[d, "\hat{\chi}\ (\text{次数付きオイラー標数})"] \\
\boxed{\text{結び目(絡み目)の図式 } D} \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & \boxed{\text{Jones 多項式}}
\end{tikzcd}
$$

例. $K =$ 

$Kh^{i,j}(K;\mathbb{Q}) =$

$j \backslash i$	-3	-2	-1	0
-1				$\mathbb{Q}$
-3				$\mathbb{Q}$
-5		$\mathbb{Q}$		
-7				
-9	$\mathbb{Q}$			

$$\Big\downarrow \hat{\chi}$$

$$J(K) = -q^{-9} + q^{-5} + q^{-3} + q^{-1}$$

$$= (q^{-1} + q)(-q^{-8} + q^{-6} + q^{-2})$$

$$\in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$$

Khovanov homology の特徴.

- 図式を用いて組み合わせ的に定義される.
- Jones 多項式よりも強い不変量.

  例. $Kh(5_1) \neq Kh(10_{132})$ $\quad (J(5_1) = J(10_{132}))$

- unknot を判定できる.

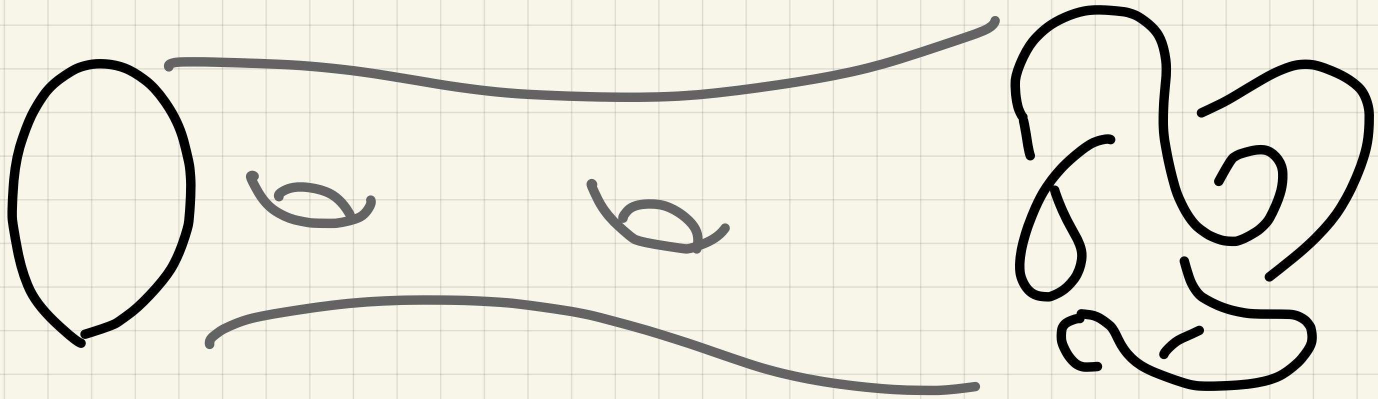
  $$\widetilde{Kh}(K;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \iff K \approx \bigcirc$$

- 低次元トポロジーの難問への応用.

  例. Milnor 予想、Conway knot の非スライス性 …

Khovanov homology の"関手性"

$\mathbb{R}^3 \times [0,1]$



$$K \xrightarrow{\quad S \quad} K'$$

$$\Big\downarrow \mathrm{Kh}$$

$$\mathrm{Kh}(D) \xrightarrow{\quad \Phi_S \quad} \mathrm{Kh}(D')$$

- 結び目の cobordism $K \xrightarrow{S} K'$ に対して、
  線形写像：

$$Kh(D) \xrightarrow{\phi_S} Kh(D')$$

  が構成できる.

- ただし、ϕ_S は S の isotopy rel ∂ に対して不変でなく、符号の不定性がある.
  (Jacobsson '04, Bar-Natan '05)

符号の不定性の解消について：

- Caprau '07
- Clark - Morrison - Walker '09
- Blanchet '10
- Vogel '20

→ 概念的・代数的に理論を拡張して解消.

(links → webs, disoriented links …
cobordisms → foams, seamed cobordisms …)

Our approach

- 従来の設定の中で不定性を解消したい.
- Jacobsson, Bar-Natan の結果から up-to-sign で関手性が成り立つことは分かっている.
- あとは特定の要素 $\alpha \in Kh(D)$ に対して,

$$\begin{array}{cccc} \Phi_S : & Kh(D) & \longrightarrow & Kh(D') \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \alpha & \longmapsto & \Phi_S(\alpha) \end{array}$$

が S の isotopy で不変となるように Φ_S の符号を調整できれば良い.

Contents

Khovanov homology 構成のレシピ

① Frobenius 代数 A を用意.

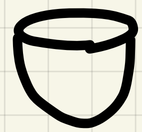
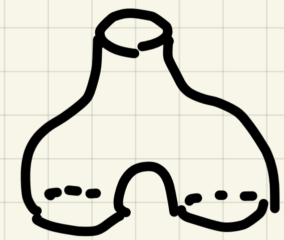
② 結び目の図式 D から、cobordism の圏における立方体状の可換図式 $\mathcal{C}_D$ を構成.

③ A より定まる TQFT $\mathcal{F}_A$ によって $\mathcal{C}_D$ を R-加群の圏の可換図式に移す.

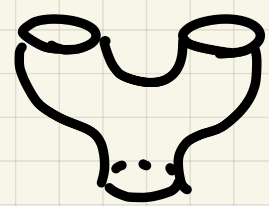
④ 図式を反可換化して、chain 複体を得る.

⑤ 次数付けをして、homology をとれば完成!

① $(A, m, \iota, \Delta, \varepsilon)$ が **R上の可換 Frobenius代数** であるとは、

i) $\iota =$  $: R \to A$, $m =$  $: A \otimes A \to A$

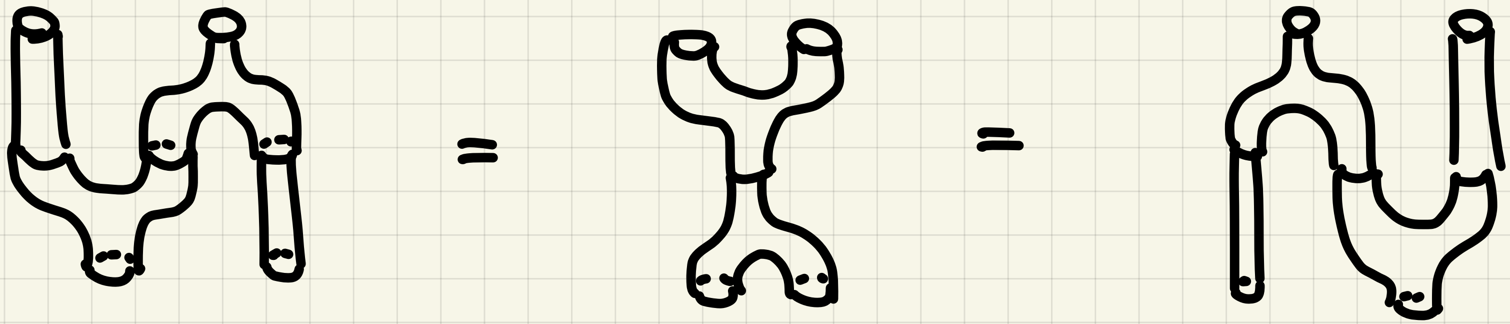
について R-代数（単位的・結合的・可換）

ii) $\varepsilon =$  $: A \to R$, $\Delta =$  $: A \to A \otimes A$

について R-余代数（余単位的・余結合的・余可換）

iii)（次ページ）

iii) Frobenius relation が成り立つ:



$$(\mathrm{id}\otimes m)\circ(\Delta\otimes \mathrm{id}) = \Delta\circ m = (m\otimes \mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\Delta)$$

$$: A\otimes A \longrightarrow A\otimes A$$

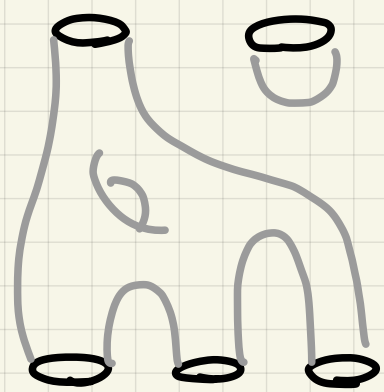
Fact R 上の Frobenius 代数は、(1+1)-TQFT

$$\mathcal{F}_A : \mathrm{Cob}_2 \longrightarrow \mathrm{Mod}_R \quad (\text{関手})$$

を定める。

対象: $\underbrace{\bigcirc \sqcup \cdots \sqcup \bigcirc}_{r\,\text{コ}} \longmapsto \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{r\,\text{コ}}$

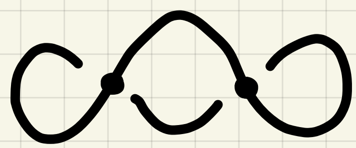
射:

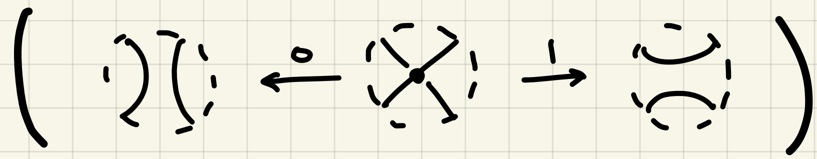


/ diffeo rel ∂

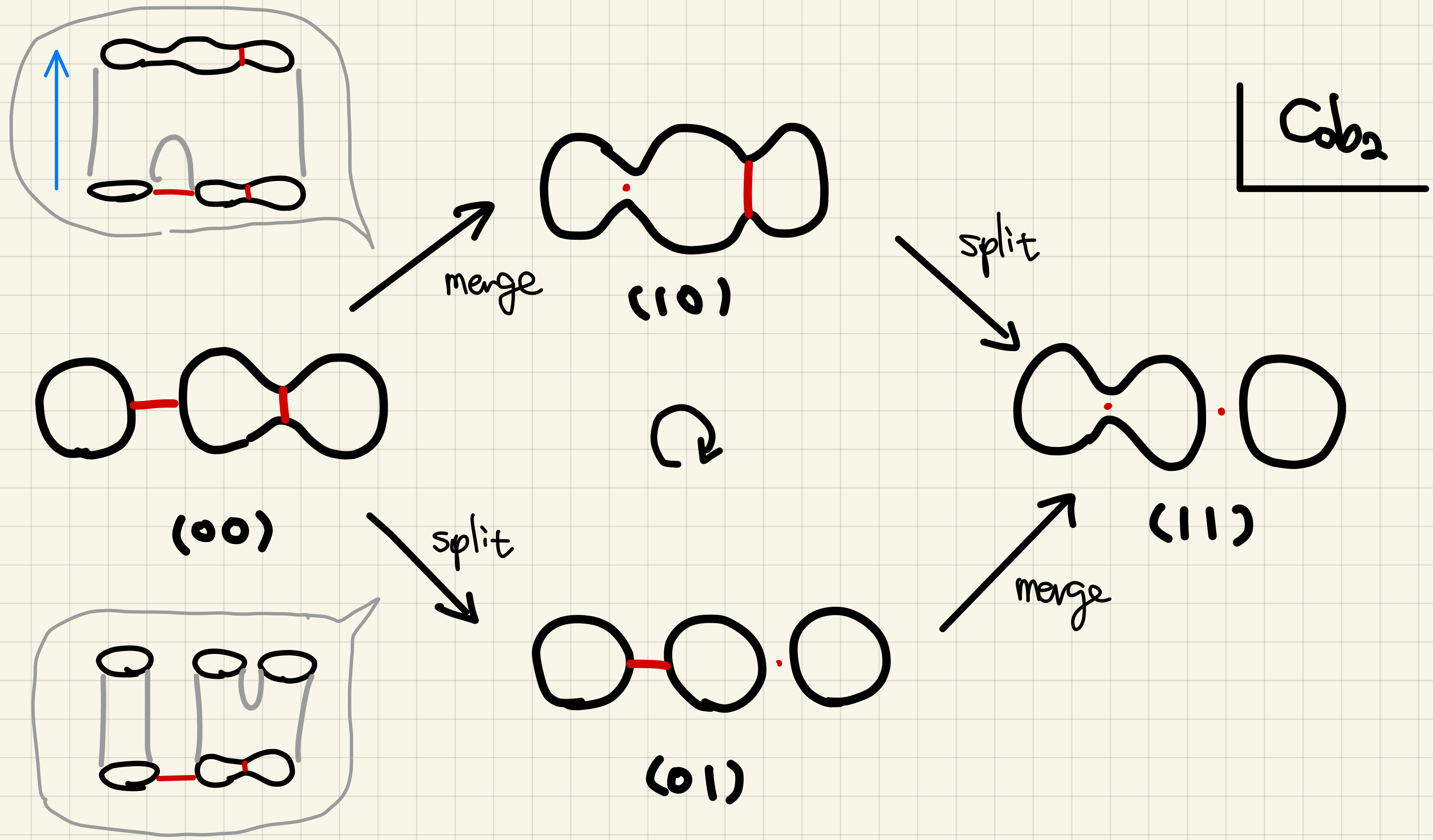
$$\longmapsto \quad \begin{tikzcd} A \otimes A \\ A \otimes A \otimes A \arrow[u, "R\text{-線形}"'] \end{tikzcd}$$

Khovanov homology の構成.

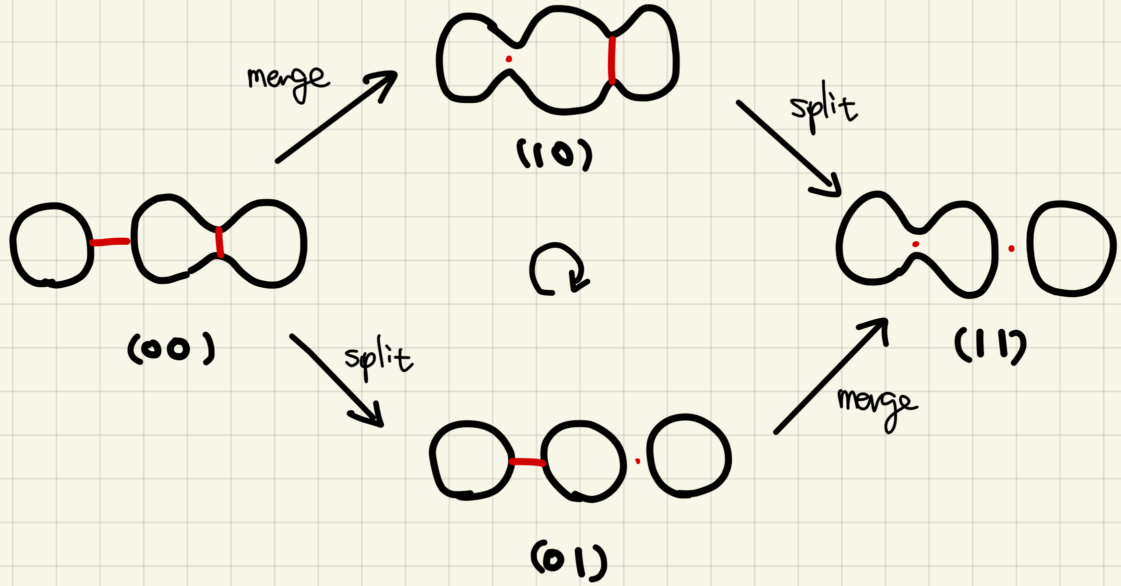
D = 



② $\mapsto$



Cob_2



3 $\Big\downarrow \mathcal{F}_A$

Mod_R

$$
\begin{tikzcd}
 & \underset{(10)}{A} \arrow[dr, "\Delta"] & \\
\underset{(00)}{A \otimes A} \arrow[ur, "m"] \arrow[dr, "id \otimes \Delta"'] & \circlearrowright & \underset{(11)}{A \otimes A} \\
 & \underset{(01)}{A \otimes A \otimes A} \arrow[ur, "m \otimes id"'] &
\end{tikzcd}
$$

(anti-commutative sign assignment)

$$
\begin{tikzcd}
 & & \underset{(10)}{A} \arrow[dr, "-\Delta"] & & \\
 & \underset{(00)}{A \otimes A} \arrow[ur, "m"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] \arrow[r, phantom, ""] & \oplus & \underset{(11)}{A \otimes A} \arrow[ddd] & \\
 & & \underset{(01)}{A \otimes A \otimes A} \arrow[ur, "m\otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dd] & & \\
 & & & & \\
0 \arrow[r] & C^0(D) \arrow[from=uuu, crossing over] \arrow[r, "d"] & C^1(D) \arrow[r, "d"] & C^2(D) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

④

⑤

$CKh^*(D) := C(D)[-n^-]$ — Khovanov chain complex.

grading shift

Khovanov の原論文では、

$$A = \mathbb{Q}[X]/(X^2) \quad (\cong \mathbb{Q}\langle 1, X\rangle)$$

が用いられる. より一般に $h, t \in R$ に対して、

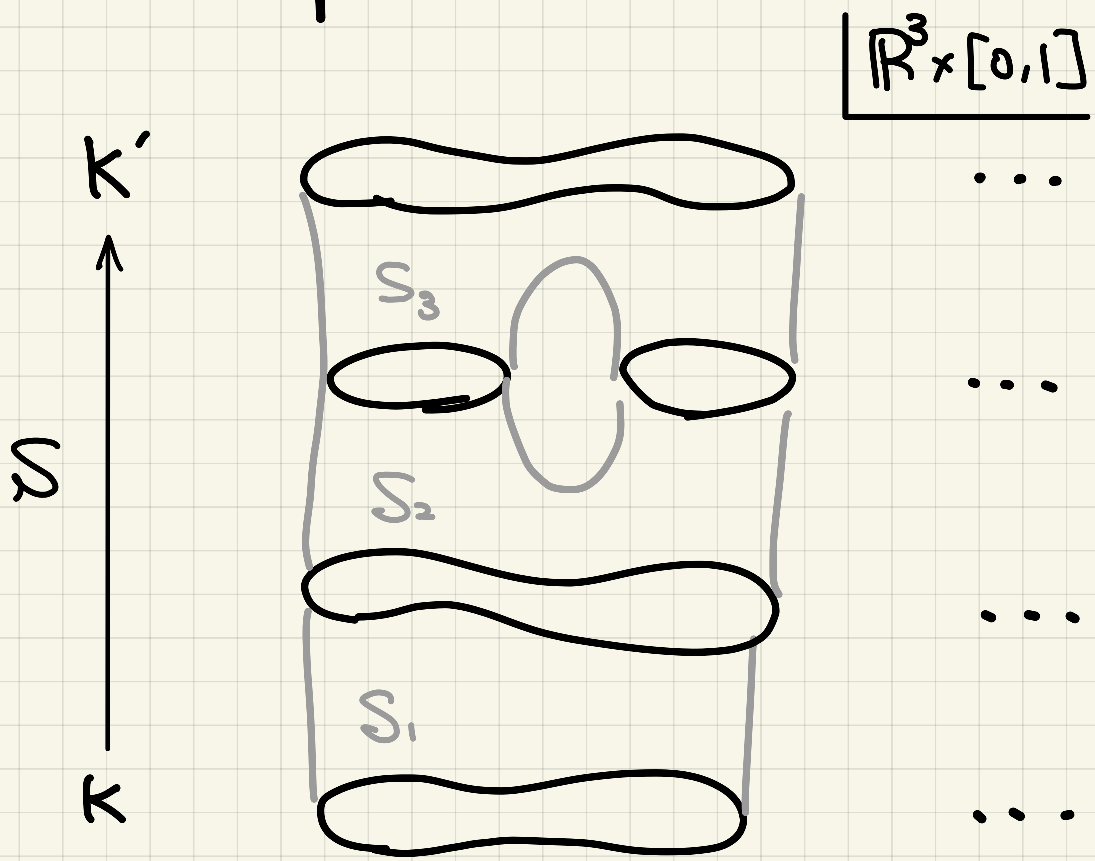
$$A_{h,t} = R[X]/(X^2 - hX - t) \quad (\cong R\langle 1, X\rangle)$$

から定まる $Kh_{h,t}(-;R)$ は結び目の不変量となる.

$$(h,t) = \begin{cases} (0,0) & \cdots \text{ Khovanov homology} \\ (0,1) & \cdots \text{ Lee homology} \\ (1,0) & \cdots \text{ Bar-Natan homology} \end{cases}$$

Contents

Cobordism map の構成



$$
\begin{array}{c}
Kh(D_3) \\
\uparrow \phi_{S_3} \\
Kh(D_2) \\
\uparrow \phi_{S_2} \\
Kh(D_1) \\
\uparrow \phi_{S_1} \\
Kh(D_0)
\end{array}
$$

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 \longmapsto \phi_S = \phi_{S_3} \circ \phi_{S_2} \circ \phi_{S_1}$$

(各 S_i が Reidemeister move / Morse move に対応するように S を分解する)

Problem

S の異なる分解：

$$S = S_N \circ \cdots \circ S_1 \underset{\text{isotopy rel } \partial}{\cong} S' = S'_{N'} \circ \cdots \circ S'_1$$

に対して、対応する射：

$$\phi_S = \phi_{S_N} \circ \cdots \circ \phi_{S_1} \overset{\pm}{\longleftrightarrow} \phi_{S'} = \phi_{S'_{N'}} \circ \cdots \circ \phi_{S'_1}$$

は、符号の違いを除いて一致する.

Idea

- 各 ϕ_{s_i} の符号を調整して、
  $\phi_s = \phi_{s'}$ となるようにしたい.

- $\phi_s = \pm \phi_{s'}$ は分かっているのだから、
  特定の要素 $\alpha \in Kh(D)$ に対して

$$\phi_s(\alpha) = \phi_{s'}(\alpha) \in Kh(D')$$

とできれば OK.

Contents

Bar-Natan homology

$A_{1,0} = \mathbb{Q}[X]/(X^2-X)$ の演算は、

$$m : A\otimes A \longrightarrow A. \qquad \Delta : A \longrightarrow A\otimes A$$

$$\begin{aligned} 1\otimes 1 &\mapsto 1 & \qquad 1 &\mapsto 1\otimes X + X\otimes 1 - 1\otimes 1 \\ X\otimes 1 &\mapsto X & X &\mapsto X\otimes X \\ 1\otimes X &\mapsto X & & \\ X\otimes X &\mapsto X & & \end{aligned}$$

Khovanov では ココ が 0

で与えられる.

$X^2 - X = X(X-1)$ より、$Y := X - 1$ すると、

$\{X, Y\}$ に関する A の演算は、

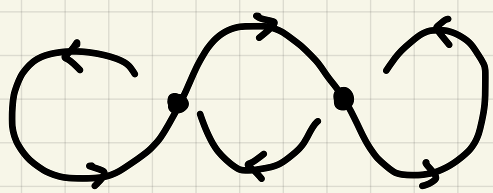
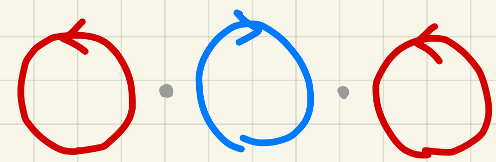
$$
\begin{aligned}
m : A \otimes A &\longrightarrow A \\
X \otimes X &\longmapsto X \\
X \otimes Y &\longmapsto 0 \\
Y \otimes X &\longmapsto 0 \\
Y \otimes Y &\longmapsto -Y
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\Delta : A &\longrightarrow A \otimes A \\
X &\longmapsto X \otimes X \\
Y &\longmapsto Y \otimes Y
\end{aligned}
$$

と対角化される!

knot diagram D に対して、 <u>canonical cycles</u>

$$\alpha(D),\ \beta(D) \in CKh_{1,0}(D)$$

を次の方法で構成する：

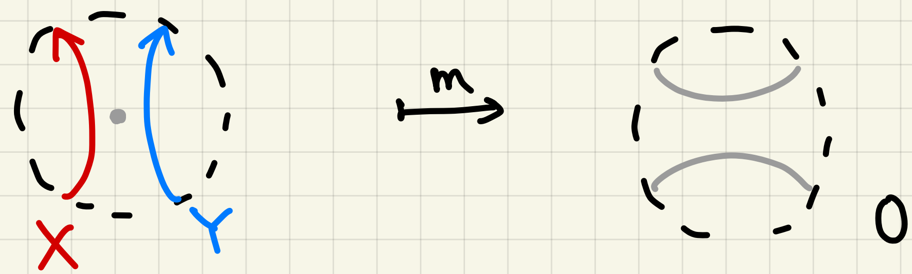
$D =$  $\rightsquigarrow$ $D_{(01)} =$ 

(orientation preserving resolution)

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \alpha(D) := X \otimes Y \otimes X \\ \beta(D) := Y \otimes X \otimes Y \end{cases}$$

Prop. $\alpha(D), \beta(D)$ は $CKh_{1,0}(D)$ の cycles.

∵)



$\blacksquare$

Thm. (Lee '05, Mackay-Turner-Vaz '07)

$$Kh_{1,0}(D) \cong \mathbb{Q}\langle \alpha(D), \beta(D) \rangle$$

(Rmk link diagram の場合も、各成分の向きに応じて canonical cycles が構成できて、$Kh_{1,0}(D)$ の基底をなす.)

Prop (Rasmussen '10)

knot cobordism $K \xrightarrow{S} K'$ が連結ならば、

対応する cobordism map によって、

$$\phi_S : Kh_{1,0}(D) \longrightarrow Kh_{1,0}(D')$$

$$\begin{cases} \alpha(D) \longmapsto \pm\alpha(D') \\ \beta(D) \longmapsto \pm\beta(D') \end{cases}$$

となる.

Prop (S. '20)

前の Prop における符号を

$$\begin{cases} \alpha(D) \xrightarrow{\phi_s} \varepsilon_s\, \alpha(D') \\ \beta(D) \longrightarrow \varepsilon_s'\, \beta(D') \end{cases},$$

とおくと、 $\varepsilon_s, \varepsilon_s'$ は次を満たす:

$$\begin{cases} \varepsilon_s \varepsilon_s' = (-1)^{j} \\ j = \frac{1}{2}\left(\delta w(D, D') - \delta r(D, D') - \chi(S) \right) \end{cases}$$

S の Euler 数

writhe の差

Seifert circles の個数の差.

∵) (link に拡張した式が)

3つの R-moves と 3つの M-moves の

それぞれで成り立つことを check.

合成でも式の形が保たれることを check. ☒

Cor $\psi_S := \varepsilon_S \cdot \phi_S$ とおけば、

ψ_S は S の isotopy rel ∂ について不変.

∵) 既知の結果より $\psi_S = \pm\psi_{S'}$ で、

$\psi_S(\alpha(D)) = \alpha(D') = \psi_{S'}(\alpha(D))$. ☒

<u>Rmk</u> 一般の (h,t) に対して、$\alpha(D)$, $\beta(D)$ は

$$X^2 - hX - t = (X-a)(X-b)$$

と分解する場合に限って定義できる.

このとき、$c := b - a \in R$ とおくと、

$$\begin{cases} \alpha(D) \overset{\psi_s}{\longmapsto} c^j \alpha(D') \\ \beta(D) \longmapsto (-c)^j \beta(D') \end{cases}$$

が成り立つ. $(j = \delta w - \delta r - \chi(s))$

$(h,t) = (0,0)$ のときは $c = 0$ となってしまう.

Contents

Thm (S. '20)

$K \xrightarrow{S} K'$ を (ori) knot cobordism とし、

$$\phi_S : Kh_{h,t}(D) \to Kh_{h,t}(D')$$

を対応する射とする.

$(h,t) = (1,0)$ の場合の ε_S を使って

$\psi_S := \varepsilon_S \cdot \phi_S$ とおくと、

ψ_S は S の isotopy rel ∂ について不変.

∵) [BN05] より、関手 $Kh_{h,t}$ は次の分解をもつ：

$$
\left(\begin{array}{lcccccccc}
Kh_{h,t} : & Cob^4(\phi) & \xrightarrow{BN} & Kob(\phi) & \xrightarrow{\mathcal{F}_A} & Kom(Mod_R) & \xrightarrow{H} & Mod_R \\
\text{obj} - & D & \mapsto & [\![D]\!] & \mapsto & CKh_{h,t}(D) & \mapsto & Kh_{h,t}(D) \\
\text{mor} - & S & \mapsto & BN(S) & \mapsto & \phi_S & \mapsto & \phi_S
\end{array}\right)
$$

ここで $S \cong S'$ (rel ∂) に対して、

$$BN(S) = \pm BN(S')$$

が成り立つ. ($\Longrightarrow \phi_S = \pm \phi_{S'}$)

knot cobordism $D \xrightarrow{S} D'$ に対して、

$$BN'(S) := \varepsilon_S \cdot BN(S)$$

と定義すると、ψ_S の定義より、

$$\psi_S = H \circ \mathcal{F}_A \circ BN'(S) .$$

$S \cong S'$ rel ∂ のとき、$A = A_{1,0}$ に対して

$\psi_S = \psi_{S'}$ だったので、

$BN'(S) = BN'(S')$ でなければならない。 $\boxtimes$

Cor Surface knot $S \subset \mathbb{R}^4$ は cobordism map :

$$Kh_{h,t}(S) : \underset{= R}{Kh_{h,t}(\phi)} \longrightarrow \underset{= R}{Kh_{h,t}(\phi)}$$

$$\in \mathrm{Hom}_R(R, R) \cong R$$

と定める. この値は、

$$Kh_{h,t}(S) = \begin{cases} 2(h^2+4t)^{\frac{g(S)-1}{2}} & (g(S) : \text{odd}) \\ 0 & (\quad : \text{even}) \end{cases}$$

で与えられる.

Rmk. — $(R, h, t) = (\mathbb{Z}, 0, 0)$ の場合、

$$Kh(S) = \begin{cases} 2 & (g(S) = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

は Khovanov–Jacobbson number. $\left(\begin{array}{l}\text{Rasmussen '05} \\ \text{Tanaka '06}\end{array}\right)$

— $(R, h, t) = (\mathbb{Z}[t], 0, t)$ の場合、

$$Kh(S) = \begin{cases} 2^{g(S)} \cdot t^{\frac{g(S)-1}{2}} & (g(S) : \text{even}) \\ 0 & (g(S) : \text{odd}) \end{cases}$$

は Tanaka '06 で与えられている。

∵) $R_0 = \mathbb{Z}[h,t]$ で示せば十分.

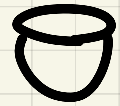
さらに 環の 拡大 :

$$R_0 \subset R_1 = R_0[a,b] \quad \left(X^2 - hX - t = (X-a)(X-b) \right)$$

$$\subset R_2 = R_1[c^{-1}] \quad (c = b - a)$$

より、 R 上で $\alpha(D)$, $\beta(D)$ が定義でき、

$c = b - a \in R$ が可逆 の場合に示せば OK.

$S =$  $\circ\, S' \circ$  と分解すると.

$Kh(S) = \varepsilon \circ \phi_{S'} \circ \iota : R \longrightarrow R$ によって.

$$1 \xmapsto{\iota} 1 = \frac{(x-a)-(x-b)}{b-a}$$

$$= c^{-1}\left(\alpha(v) - \beta(v)\right)$$

$$\xmapsto{\phi_{S'}} c^{-1}\cdot\left(c^{j}\alpha(v') - (-c)^{j}\beta(v')\right)$$

$$= c^{j-1}\left((x-a) + (-1)^{j+1}(x-b)\right)$$

$$\xmapsto{\varepsilon} c^{j-1}\left(1 + (-1)^{j+1}\right).$$

$$\therefore\ Kh(S) = c^{j-1}\left(1+(-1)^{j+1}\right).$$

ここで、 $j = -\frac{1}{2}\left(\chi(S')\right) = g(S)$ より、

$$Kh(S) = \begin{cases} 2c^{g(S)-1} & (g(S) : \text{odd}) \\ 0 & (g(S) : \text{even}) \end{cases}$$

あとは $c = \sqrt{h^2+4t}$ より.

$\blacksquare$

References

- M. Khovanov, "A categorification of the Jones polynomial" (2000)
- , "Link homology & Frobenius extensions" (2006)
- E.S. Lee , "An endomorphism of the Khovanov invariant" (2005)
- D. Bar-Natan, "Khovanov's homology for tangles and cobordisms" (2005)
- J. Rasmussen, "Khovanov homology and the slice genus" (2010)
- , "Khovanov's invariant for closed surfaces" (2005)
- M. Jacobsson , "An invariant of link cobordisms from Khovanov homology" (2004)
- K. Tanaka , "Khovanov-Jacobsson numbers and invariants of surface knots derived from Bar-Natan's theory" (2006)