# Donaldsonの管状エンド定理

2021年2月23日

松尾信一郎
名古屋大学

# 今日やりたいこと

- $\mathbb{R}^4$ のインスタントンと共形変換
- Uhlenbeck コンパクト性
  - Coulomb ゲージの存在定理
  - 特異点除去定理
- Donaldson の管状エンド定理

$SU(2) \curvearrowright \mathbb{C}^2$

$$\begin{array}{ccc} P & & E \\ \downarrow SU(2) & \longleftrightarrow & \downarrow \mathbb{C}^2 \\ X & & X \end{array}$$

frame bdl

hermitian met E 固定

$A : SU(2)$

$\nabla_A$ : metric, det E の自明接続を保つ

共変微分 $\nabla_A : \Omega^i \to \Omega^i \otimes T^*M$

外共変微分 $d_A : \Omega^i \to \Omega^{i+1}$

## 注意

ASD = Anti Self Dual

- 私は反自己双対接続で話します.
- だから, Donaldson の主定理も negative definite になります.
- また, 四次元多様体は X と書いて, 接続は A と書きます.

## Donaldson の Theorem A

$X$ を四次元有向閉可微分多様体とする. $\pi_1(X) = \{1\}$ とする.

このとき, $b_+(X) = 0$ ならば, $X$ の交叉形式は標準対角型である.

交叉形式が負定値

・四次元有向閉多様体 $\rightsquigarrow$ 交叉形式

$$H^2 \otimes H^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \langle \alpha \cup \beta, [X] \rangle$$

Freedman 位相多様体

・定値二次形式はものすごくたくさんある。

# Donaldson の Theorem A

$X$ を四次元有向閉多様体とする． $\pi_1(X) = \{1\}$ とする．

このとき， $b_+(X) = 0$ ならば， $X$ の交叉形式は標準対角型である．

$P$
$\downarrow SU(2)$
$X$

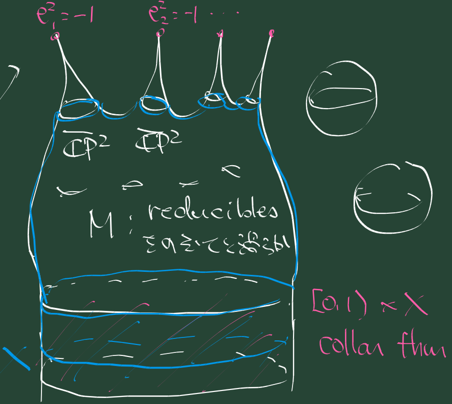
Fix $g$ : generic

$c_2(P) = 1$

$M := \{ [A] \mid F_A^+ = 0 \}$

$\dim M \overset{\uparrow}{=} 5$

AS index thm




$b^+ = 1$ $\dim X = 4$
$\dim M = 2$

$\# \overline{\mathbb{CP}}^2$ と $X$ との同境ができる．

## § $\mathbb{R}^4$ 上の 1-インスタントン (BPST-インスタントン)

$\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$

$SU(2) = Sp(1) = \{ q \in \mathbb{H} \mid |q|^2 = 1 \}$

$su(2) = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$

このとき,

$$A = \frac{\mathrm{Im}(\bar{x}dx)}{1 + |x|^2}$$

は, $\mathbb{R}^4$ 上の $su(2)$-valued 1-form で,

自明束の Conn を定める. さらに, ASD である.

(証)

$$\begin{cases} F_A = \dfrac{d\bar{x} \wedge dx}{(1+|x|^2)^2} \\ F_A + * F_A = 0 \end{cases} \qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4} |F_A|^2 dx = 1$$

$|x| \to \infty$ $\dfrac{1}{|x|^4}$ で decay.

$$A = \frac{\operatorname{Im} \bar{x}\, dx}{1+|x|^2}$$

$\lambda \in (0,\infty)$ に対して、

$$A_\lambda := \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{x}}{\lambda}\right) d\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{1+\left|\frac{x}{\lambda}\right|^2} = \frac{\operatorname{Im}(\bar{x}\, dx)}{\lambda^2+|x|^2}$$

もASD connである。

$$F(A_\lambda) = \frac{d\left(\frac{\bar{x}}{\lambda}\right)\wedge d\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\left(1+|x/\lambda|^2\right)^2} = \frac{\lambda^2\, d\bar{x}\wedge dx}{\left(\lambda^2+|x|^2\right)^2} \quad \begin{matrix} \leftarrow \lambda^2 \\ \leftarrow \lambda^4 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4} |F(A_\lambda)|^2\, dx = 1.$$

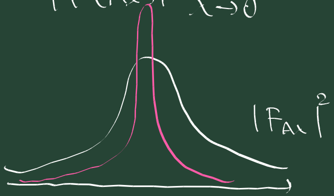
観察

・$x \neq 0$ のとき

$$|F(A_\lambda)|^2 \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0$$

・$x = 0$ のとき

$$|F(A_\lambda)|^2 \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \infty$$




$\lambda \to 0$ のとき、
原点に集中する。

問 $\forall f \in C^0_{cpt}(\mathbb{R}^4)$ に対して,

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4} f(x)\,|F(A_\lambda)|^2\,dx \longrightarrow f(0)$$

を示せ。つまり,

$$\underbrace{\frac{1}{8\pi^2}|F_{A_\lambda}|^2 dx}_{\mathbb{R}^4\text{上の測度}} \longrightarrow \underbrace{\delta_0}_{\text{原点に台を持つディラック測度}}$$

問 $\lambda \to \infty$ のときを考察せよ.

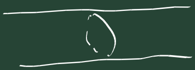
ゲージ変換 $\mathbb{H} \setminus \{0\} \to Sp(1)$

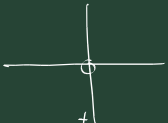
$x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$

$$\frac{1}{8\pi^2}|F_{A_\lambda}|^2 dx \to \text{“}\delta_\infty\text{”}$$

removable singularity

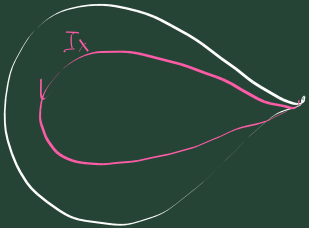
$$\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$$





$$(\omega, t) \longmapsto e^t \omega$$

$\mathbb{B}(\mathbb{S}^3)$

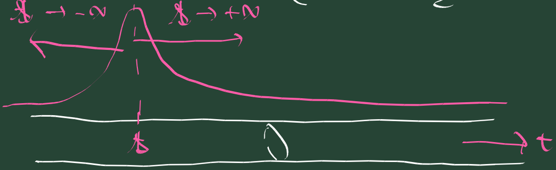



有明
[illegible]

$$I_\lambda \rightsquigarrow A_\lambda$$

$e^t = \lambda$

$$F(I_\lambda) = \frac{4}{\left(\frac{e^{(t-\lambda)} + e^{-(t-\lambda)}}{2}\right)^2}$$



より一般に, $\lambda \in (0, \infty)$ と $z \in \mathbb{R}^4$ に対して

$$A_{z,\lambda} := \frac{\mathrm{Im}\left(\overline{\left(\frac{x-z}{\lambda}\right)}\, d\left(\frac{x-z}{\lambda}\right)\right)}{1 + \left|\frac{x-z}{\lambda}\right|^2}$$

も ASD conn である.

(問) ・ $F(A_{z,\lambda})$ を求めよ.

・ $\displaystyle \frac{1}{8\pi^2} \int |F(A_{z,\lambda})|^2 dx \xrightarrow[\lambda \to 0]{} ??$

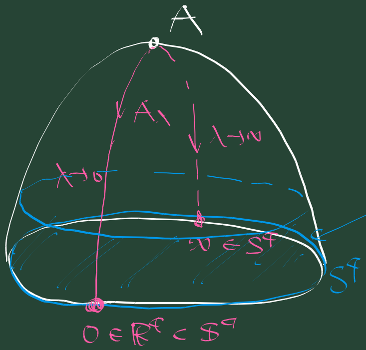
$x \longmapsto \dfrac{x-z}{\lambda}$ で ASD が不変

ASD eq の共形不変性 ⟵ $\dim X = 4$ で, 2-form の $L^2$-norm が スケール不変

∘ $M_1(S^4)$ について　　$M_1(S^4) =$ $c_2(P)=1$ の $P$ のモジュライ

$$\begin{array}{ccccc} (0,\infty)\times\mathbb{R}^4 & \longrightarrow & M_1(S^4) & & \\ & & \| & & \\ & & M & \longrightarrow & M_1(S^4) = \mathrm{Conf}(S^4)/SO(5) \\ & & & & \| \\ & & & & \mathbb{H}^5 \\ (\lambda, z) & \longmapsto & [A_{z,\lambda}] & & \end{array}$$

Thm (Atiyah-Hitchin-Singer) 上の対応は同相.




$$\frac{1}{8\pi^2}|F_{A_\lambda}|^2 d\mu \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \delta_0$$

このとき、$\forall\Lambda>0$ に対して、

$M_\Lambda := \{[A_{z,\lambda}] \mid \lambda \leqq \Lambda\}$

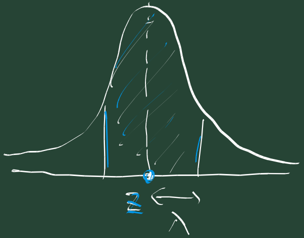
(問) ・$\forall\Lambda>0$　$M\setminus M_\Lambda$ は cpt.

・$M_\Lambda \cong [0,\Lambda]\times S^4$

・$[A] \in M_1$ が与えられたとき $\lambda$ と $z$ をどう定義するか?

$[A] \in M_1(S^4)$ に対して、

$$\lambda([A]) := \min \left\{ \rho \in (0,\infty) \;\middle|\; \exists z \in S^4 \;\; \frac{1}{8\pi^2}\int_{B_z(\rho)} |F_A|^2 d\mu = \frac{1}{2} \right\}$$




事実

・$\lambda : M \to (0,\infty)$ 連続

$\frac{1}{\lambda} : M \to (0,\infty)$ proper

・このzはuniqueに定まる

・$\underbrace{\lambda([A_{z,\lambda}])}_{\text{スケール}} = \lambda$ かつ $\underbrace{z([A_{z,\lambda}])}_{\text{センター(中心)}} = z$

これからは、一般の $X$ : negative def & $c_2(P) = 1$ で、

$\lambda$ と $z$ を定義したい。 この定義が難しい。

# § Uhlenbeck コンパクト性

**定理** (Uhlenbeck)

$(X,g)$ : closed oriented Riem. 4-mfd

$\begin{array}{c} P \\ \downarrow SU(2) \\ X \end{array}$ $\quad M_{(X,g)}(P)$

インスタントンモジュライ

このとき,

$\forall \{[A_j]\} \subset M_{(X,g)}(P)$

$\exists \{[A_i]\} \subset \{[A_j]\}$ subseq

$\exists \{x_1, \dots, x_l\} \subset X$

$\exists \begin{array}{c} P' \\ \downarrow SU(2) \\ X \end{array} \quad \exists A_\infty \in M_{(X,g)}(P')$

$\exists u_i : P|_{X \setminus \{x_1, \dots, x_l\}} \to P'|_{X \setminus \{x_1, \dots, x_l\}}$

ゲージ変換

such that

i) $\frac{1}{8\pi^2} |F_{A_i}|^2 d\mu_g \longrightarrow \frac{1}{8\pi^2} |F_{A_\infty}|^2 d\mu_g + \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_l}$ デルタ測度

ii) $\forall K \subset\subset X \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$

$u_i(A_i)|_K \xrightarrow{C^\infty} A_\infty|_K$

(問) $c_2(P) = c_2(P') + l$ を示せ.

系 特に, $c_2(P) = 1$ のときは, 次のどちらかだけがおきる.

(問)

(i) $\exists x \in X \quad \frac{1}{8\pi^2} |F_{A_i}|^2 d\mu_g \longrightarrow \delta_x$

(ii) $\exists u_i : P \to P \quad u_i(A_i) \xrightarrow{C^\infty(X)} A_\infty$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "u_i"] \arrow[dr] & & P \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

## 証明のキーポイント

$(a, b)\, d\mu = a \wedge * b$

① Chern-Weil

$$\mathrm{tr}(F_A \wedge F_A) = \mathrm{tr}\left((F_A^+ + F_A^-) \wedge (F_A^+ + F_A^-)\right) = \left(|F_A^-|^2 - |F_A^+|^2\right) d\mu_g$$

$F_A^+ = 0$ のとき,

$$c_2(P) = \frac{1}{8\pi^2} \int \mathrm{tr}\, F_A \wedge F_A = \frac{1}{8\pi^2} \int |F_A|^2 d\mu_g$$

② Coulombゲージ

③ 特異点除去定理

## § Coulomb ゲージ

$B^4 = B = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| \leq 1 \}$

定理 (Uhlenbeck)

$\exists \epsilon > 0 \ \exists C > 0 \quad \forall A$ : conn on $\begin{matrix} B \times SU(2) \\ \downarrow \\ B \end{matrix}$

with $\boxed{\|F_A\|_{L^2} \leq \epsilon}$ small curvature

ベクトル場の発散（ダイバージェンス）

$\exists u$ : ゲージ変換 $L_2^2$ such that $\tilde{A} := u(A)$

$$\begin{cases} \text{i)} \ d^* \tilde{A} = 0 & \leftarrow \text{Coulomb ゲージ} \\ \text{ii)} \ * \tilde{A}|_{\partial B^4} = 0 & \leftarrow \text{Neumann 境界条件} \\ \text{iii)} \ \|A\|_{L_1^2} \leq C \|F_A\|_{L^2} & \leftarrow \text{アプリオリ評価} \end{cases}$$

§ Uhlenbeck の C ゲージ は 何が エライ のか??

$A$ : conn $\rightsquigarrow$ $F_A$ : curv.

$$F_A = dA + \underbrace{A \wedge A}$$

そして $A \in L^2_1$ だったならば, $F_A = \underbrace{dA}_{\uparrow\, L^2} + \underbrace{A \wedge A} \in L^2$ である.

$A \in L^2_1 \hookrightarrow L^4$

$|A|^2 \in L^2$

では, $F_A \in L^2$ のとき, $A \in L^2_1$ は言えるか??

((elliptic) regurality)

$\rightsquigarrow$ 一般には ウソ.

ゲージ変換

$$F(u(A)) = u F_A u^{-1}$$

$$u(A) = u A u^{-1} - (du)u^{-1}$$

uの取り方でいくら
でも変えることできる

調和積分 (U(1)-ゲージ理論)

$$u = e^{if} \qquad u^{-1}du = i\,df$$

$$u(A) = A - i\,df$$

$$\rightsquigarrow \text{調和形式} \begin{cases} d\omega = 0 \\ d^{*}\omega = 0 \end{cases}$$

## § 線型 vs 非線型

$$\Delta f = \nabla f \quad \text{と} \quad \Delta f = |\nabla f|^2$$

$$\Delta f = \nabla f$$
$$\downarrow$$
$$\int (\Delta f, f) = \int (\nabla f, f)$$
$$\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \wedge\!|$$
$$\int |\nabla f|^2 \qquad \sqrt{\int |\nabla f|^2}\sqrt{\int |f|^2}$$

$$\therefore \int |\nabla f|^2 \leq \int |f|^2$$

楕円型評価

← 右と同じことは
非線型にはうまくいかない

$\Delta f = |\nabla f|^2$ on $\Sigma$, $\dim \Sigma = 2$

elliptic estimate

$$\|f\|_{L^p_2} \le C\left(\|\Delta f\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}\right)$$

$$\|f\|_{L^p_2} \ge \|\nabla f\|_{L^p_1}$$

$p = \frac{4}{3} \leftarrow \dim \Sigma = 2$ $\qquad L^{4/3}_1 \hookrightarrow L^4$ on $\Sigma^2$

$$\|\nabla f\|_{L^{4/3}_1} \leq C_1 \big( \underbrace{\|\Delta f\|_{L^{4/3}}}_{\| \leftarrow \Delta f = |\nabla f|^2} + \|f\|_{L^{4/3}} \big)$$

$$\| |\nabla f|^2 \|_{L^{4/3}} = \|\nabla f\|^2_{L^{8/3}}$$

Sobolev $\|\nabla f\|_{L^4} \leq C_2 \|\nabla f\|_{L^{4/3}_1}$

$$\rightsquigarrow \|\nabla f\|_{L^4} \leq C_1 C_2 \left( \|\nabla f\|^2_{L^{8/3}} + \|f\|_{\frac{4}{3}} \right)$$

$$\|\nabla f\|_{L^4} \leq C_1 C_2 \left( \|\nabla f\|^2_{L^{\frac{8}{3}}} + \|f\|_{\frac{4}{3}} \right)$$

Hölder

$$\|\nabla f\|_{L^{\frac{8}{3}}} \leq \|\nabla f\|^{\frac{1}{2}}_{L^2} \cdot \|\nabla f\|^{\frac{1}{2}}_{L^4} \quad \left( \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{4} \right)$$

$$\|\nabla f\|_{L^4} \leq C_1 C_2 \|\nabla f\|_{L^2} \|\nabla f\|_{L^4} + C_1 C_2 \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}}$$

$$\boxed{\left(1 - C_1 C_2 \|\nabla f\|_{L^2}\right) \|\nabla f\|_{L^4} \leq C_1 C_2 \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}}}$$

s.t. $\|\nabla f\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{C_1 C_2} \Rightarrow \|\nabla f\|_{L^4} \leq 2 C_1 C_2 \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}}$

## small energy 条件

- Coulomb ゲージ ← 4 dim
- minimal 2-sphere
  pseudohol map ← symplectic
- Yamabe の問題 ← PSC

Conf($S^N$) の非コンパクト性

critical Sobolev

解析

- Brezis - Nirenberg
- Lions

"Concentration compactness"

# § カラー定理

$$\lambda : M_1(S^4) \longrightarrow (0,\infty)$$

## Uhlenbeck cpt性の系

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} : M_1(X) \longrightarrow (0,\infty) \text{ は proper}}$$

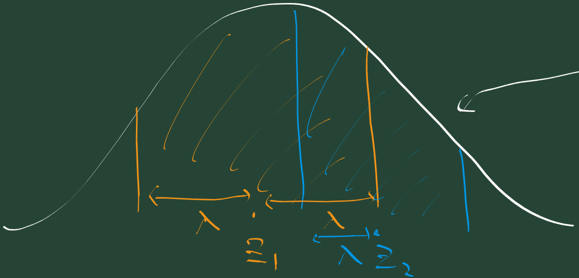
$$\lambda := \min\left\{ \rho \in (0,\infty) \;\middle|\; \underbrace{\exists z \in X}_{} \ \frac{1}{8\pi^2}\int_{B_z(\rho)} |F_A|^2 d\mu = \frac{1}{2} \right\}$$

これが一意じゃないかも
しれない

## 観察

・$k=1$ のときは、$\lambda \ll 1$ のときは、$|F_A|^2$ の山はひとつ

・$z_1$ と $z_2$ が min を attain したとせよ。




$$\boxed{\mathrm{dist}(z_1, z_2) < 2\lambda}$$

さらに、$\mathcal{U}$ cpt性より、$\lambda \ll 1$ のときは、

ASD conn は とじこめの点に局所化している。

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}^4$ の考察に帰着される。

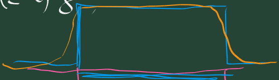
$\lambda_0 \ll 1$

$\lambda([A]) \leq \lambda_0 \Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ z[A]}}{z}$ は一意にとれる。

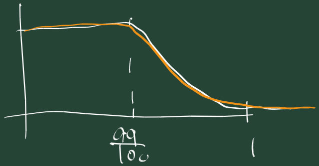
$M_{\lambda_0} := \{ \lambda[A] \leq \lambda_0 \}$

$\mathbb{B} : M_{\lambda_0} \longrightarrow (0, \lambda_0) \times X$ ができた。

$\mathbb{B}$ を smooth にするために 次のようにする;



Fix $\beta =$




$: [0,\infty) \to [0,1]$ $B_2(s)$

$$\int_{B_2(s)} |F_A|^2 d\mu = \int_X \chi_{B_2(s)} |F_A|^2$$

$A \in \mathcal{M}_1(X)$

$$R_A(z,s) := \frac{1}{s^{n-4}} \int_X \beta\left(\frac{\mathrm{dist}(x,z)}{s}\right) |F_A|^2 d\mu_g$$

for $z \in X$, $s \in (0,\infty)$

**Prop**
$\lambda[A] := \min\{ s \mid \exists z \in X \;\; R_A(z,s) = \frac{1}{2} \}$

$\lambda \ll 1 \Rightarrow F_A$ が集中.

$\rightsquigarrow \mathbb{B} : \mathcal{M}_\lambda \to (0,\infty) \times X$ <u>smooth</u>.

$$\mathbb{B} : M_{\lambda_0} \longrightarrow (0, \lambda_0) \times X$$

<u>やりたいこと</u>. $\lambda_0 \ll 1$ のとき, $\mathbb{B}$ が diffeo であることを示したい。

そのために,

① $\mathbb{B}$ が proper

② $\mathbb{B}$ が local diffeo

→ $\mathbb{B}$ が covering

③ $\mathbb{B}$ が injective

→ $\mathbb{B}$ が diffeo

① $\mathcal{B}$ が proper ← Uhlenbeck コンパクト性

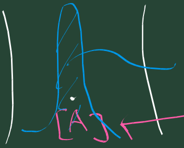
② $\mathcal{B}$ が local diffeo ← 変形理論

③ $\mathcal{B}$ が injective.

② ・$\dim M_\lambda = \dim (0,\lambda_0)\times X$ (= 5)

・local diffeo $\Longleftrightarrow$ $d\mathcal{B}$ が bijective.

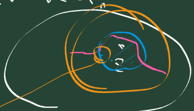
$d\mathcal{B}$ が surjective であることを示せばよい。



$\mathbb{R}^4$

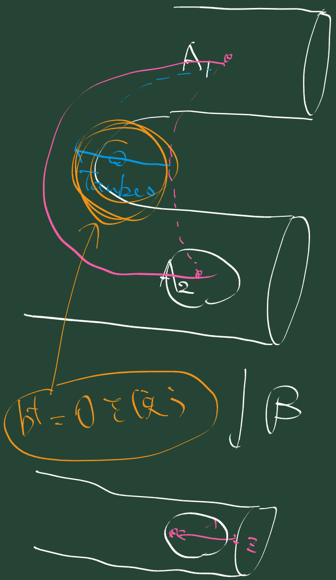
$A_{z,\lambda}$ にすごく近い

$[A]$ ← infinitesimal な変形が 5次元分 あればよい。



exponential decay

③




$\# \mathbb{CP}^2 \simeq \# X$

$A_1 - A_2 = a$

$A_1 + ta$

$A_1$と$A_2$

$\lambda << 1 \Rightarrow |a| << 1$

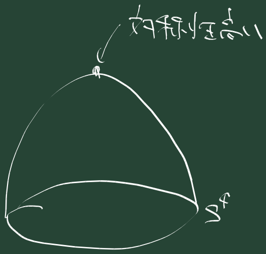
$\lambda << 1$のとき、

$A_1$も$A_2$も $A_{2,\lambda}$ on $\mathbb{R}^4$ に
そのすごく近い。

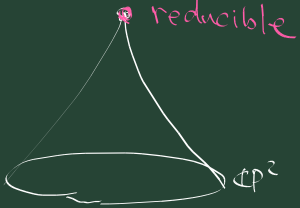
テキスト

Morgan, "An introduction to gauge theory"

演習問題を解くとよいでしょう.




$M_1(S^4)$




$M_1(\mathbb{C}P^2)$