Freed-Uhleneck's Instantons and Four-manifolds 4 章 を読む

Yuichi YAMADA （山田 裕一）
The Univ. of Electro-Comm. （電気通信大学）

2021 Feb. 21 Zoom

Diffrential Topology '21

1. Introduction
2. Slice Again
3. Str. of the singularity
4. Perturb Metric

4 次元可微分多様体 M 上の $\mathrm{SU}(2)$ 主束 $(k=1)$ P を考える.

接続のなす空間 $\mathcal{A}$ をゲージ群 $\mathcal{G}$ で割った商空間 を考える：

モジュライ空間 $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$

$\hat{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ で自己双対な既約接続のなす部分空間とする.

3 章では,

$\hat{\mathcal{M}}$ が generic な計量に対して**多様体になる**こと (5 次元) を示した.
特異点 $\{p_1, \ldots p_m\}$ は **可約接続**に対応する.

4 章では,

この特異点の近傍が $\mathbb{C}P^2$ の錐 cone であることを示す.

この後,

$\hat{\mathcal{M}}$ の向き付け可能性 などが加わり, $\mathcal{M}$ の compact 化 $\overline{\mathcal{M}}^5$ から M^4 から $\coprod_m \mathbb{CP}^2$ への cobordism が得られる.

［３章からの引継ぎ］

可約接続 D とする．
・$\mathcal{G}$ の $\mathcal{M}$ への作用について，可約接続 D での isotropy 群は

$$\mathcal{G}_D = \{t = \exp(\theta u) \mid Du = 0, |u| = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \cong S^1$$

重要な楕円型複体がある．この系列の各項に $\mathcal{G}_D$ が作用する．

$$\begin{array}{ccccccccc} & & H^0_D & & H^1_D & & H^2_D & & \\ 0 & \to & \Omega^0(\mathrm{ad}\eta) & \xrightarrow{D} & \Omega^1(\mathrm{ad}\eta) & \xrightarrow{P_- D} & \Omega^2_-(\mathrm{ad}\eta) & \to & 0 \end{array}$$

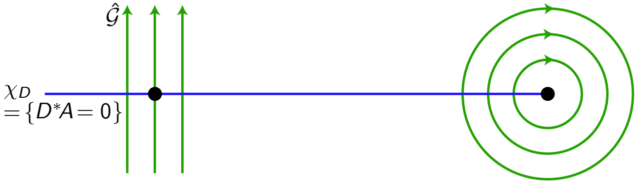
次の空間が重要

$$\chi_D = \{A \in \Omega^1(\mathrm{ad}\eta) \mid D^* A = 0\}$$

$$\chi_D = \{A \in \Omega^1(\mathrm{ad}\eta) \mid D^*A = 0\ \}$$

D を基点とすれば $\mathcal{A} = \{D + A\ |A \in \Omega^1(\mathrm{ad}\eta)\}$.
Lie 群 $\mathcal{G}$ の Lie 環は $\hat{\mathcal{G}} = \Omega^0(\mathrm{ad}\eta)$, 作用は $+Du$.
内積を用いて直交補空間を捉える

$$(A, Du) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^*A, u) = 0$$



$$\mathcal{A} = D + \Omega^1(\mathrm{ad}\eta)$$

Theorem (4.4)

可約接続 D について,

$$\mathcal{O}_{\overline{D}} \simeq \chi_D/\mathcal{G}_D$$

$\overline{D} \in \mathcal{O}_{\overline{D}}$ は商特異点で，この点を除いて *smooth*.

証明概要

$$\begin{array}{cccc} L_D : & \Omega^1(\mathrm{ad}\eta) \times \mathcal{G} & \to & \Omega^0(\mathrm{ad}\eta) \\ & \langle A, s \rangle & \mapsto & D^*(s^{-1}Ds + s^{-1}As) \end{array}$$

の微分の第２成分が $\delta_2 L_D = D^*D$ で Ker $= H_D^0$.
その直交補空間 $H_D^{0\perp}$ $(= \mathrm{Im}\ D^*)$ に制限した

$$\tilde{L_D} : \quad \Omega^1(\mathrm{ad}\eta) \times \exp(H_D^{0\perp}) \quad \to \quad H_D^{0\perp}$$

は $\langle A, s \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ で可逆．$\tilde{A}$ に対して s の方程式 $\tilde{L_D}(\tilde{A}, s) = 0$ は解をもつ.

$$\begin{cases} A & = s^{-1}Ds + s^{-1}\tilde{A}s \\ D^*A & = 0 \end{cases}$$

$\square$

自己双対接続のモジュライ空間は，特異点の付近では

$$\begin{array}{rccc} P\_F: & \chi_D & \to & \Omega^2_-(\mathrm{ad}\eta) \\ & A & \mapsto & P\_(DA + A\wedge A) \end{array}$$

の Ker を $\mathcal{G}$ で割ったものになる．
P_F は非線形 FredHolm map で，線形化は P_D.

Theorem (4.7)

Fredholm map $\Psi : X \to Y$ *with* $\Psi(0) = 0$, $T = (d\Psi)_0$ に対して

$$\begin{cases} X = Ker\ T \oplus X' \\ Y = Im\ T \oplus Y' \end{cases} \quad \text{および} \quad \phi : X \to Y'$$

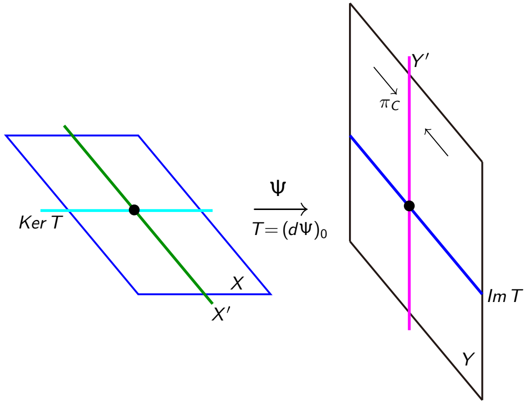
と X の *diffeo.* が存在して $\Psi = T + \phi$, ここで $\phi(0) = 0$, $(d\phi)_0 = 0$.

この結果を P_F に適用する．T に当たるのが $P\_D|_{\mathrm{Ker}\ D^*}$

Corollary (4.8)

$$\begin{array}{rccc} \phi: & Ker\ D^* & \to & (Im\ P\_D)^\perp \\ & \| & & \| \\ & H^1_D & & H^2_D \end{array}$$

$$\begin{cases} X = \mathrm{Ker}\ T \oplus X' \\ Y = \mathrm{Im}\ T \oplus Y' \end{cases}$$ および $\phi : X \to Y'$



$\chi : X \to X,\ \ x \mapsto \pi_K(x) + \tilde{T}(\Psi(x)),\qquad \tilde{T} = T^{-1} \circ (1 - \pi_C)$

$\phi(x') = \pi_C(\Psi(\chi(x')))$

参考：Open Mapping Thm.

Theorem

開写像定理
X, Y を *Banach* 空間（完備ノルム距離空間）とする.
全射の連続線形作用素 $A : X \to Y$ は
・開写像である.
・逆作用素 $A^{-1} : Y \to X$ は連続.

無限次元の空間を扱うので，位相（連続性，完備性など）をめぐる議論が必要.

Proposition (4.9)

可約接続 D の場合に，S^1 作用（標準作用 $\mathbb{C}$）も考慮して

$$H_D^1 \cong \mathbb{C}^q, \qquad H_D^2 \cong \mathbb{C}^p \oplus P_- H_{dR}^2(M)$$

最後の項への S^1 作用は自明.

証明概要：作用の Fixed pt に注目する．$u \in \Omega^0(\mathrm{ad}\eta)$ with $Du = 0$, $|u| = 1$ について $A \in H_D^1$ が Fixed pt．とすると $[u, A] = 0$．$A = \theta \otimes u$ for $\theta \in \Omega^1$．ここで 3 章と同様の議論 で $d^*\theta = P_- d\theta = 0$ となる．
$d\theta$ は self dual

$$0 = \int_M d(\theta \wedge d\theta) = \int_M d\theta \wedge d\theta = \int_M d\theta \wedge *d\theta = \int_M |d\theta|^2 vol$$

から $d\theta = 0$（θ は harmonic）.

M^4 が positive def. なら $P_- H_{dR}^2(M) = \{0\}$ かつ $q = p + 3$
(Atiyah-Singer の指数定理：index $= 8k - 3(1 - b_1 + b_-^2)$)

3章と同様の議論 (3.15) p56,57 $\alpha \in \Omega^2_-$, $u \in \Omega^0(\mathrm{ad}\eta)$

If $D(\alpha \otimes u) = 0$ and $|u| = 1$, then $Du = 0$

証明概要

$0 = D(\alpha \otimes u) = d\alpha \otimes u + \alpha \wedge Du$ と $0 = d(u,u) = 2(Du, u)$ から

$d\alpha = -\alpha \wedge (Du, u) = 0$ で $\alpha \wedge Du = 0$.

$\alpha = \frac{|\alpha|}{\sqrt{2}}(\theta^1 \wedge \theta^2 - \theta^3 \wedge \theta^4)$, $Du = \sum \theta^i \otimes w_i$ と座標をとると

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \wedge Du \\ &= \frac{|\alpha|}{\sqrt{2}}(\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \otimes w_3 + \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^4 \otimes w_4 \\ &\qquad - \theta^3 \wedge \theta^4 \wedge \theta^1 \otimes w_1 - \theta^3 \wedge \theta^4 \wedge \theta^2 \otimes w_2) \end{aligned}$$

から $w_1 = \cdots = w_4 = 0$ つまり $Du = 0$ □

4章で，類似も使う（$\alpha \wedge : \Omega^1(\mathrm{ad}\eta) \to \Omega^3(\mathrm{ad}\eta)$ が可逆.）

Corollary (4.10)

If $H^2_D = 0$, then $\phi^{-1}(0)/\mathcal{G}_D$ is homeo. to a cone on $\mathbb{C}P^2$.

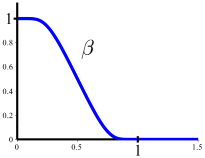
m 個の特異点（可約接続）を互いに干渉しないように小さく摂動する.

Theorem (4.11)

There exists a perturbation of $\mathcal{M}$ so that locally about a reducible connection, $\mathcal{M}$ is homeo. to an open cone on $\mathbb{C}P^2$.

$\phi : \mathbb{C}^{p+3} \to \mathbb{C}^p$ を摂動する. $L : \mathbb{C}^{p+3} \to \mathbb{C}^p$ を線形写像, β を Cutoff 関数とする.

$$\bar{\phi}(z) = \phi(z) + \varepsilon^2 \beta\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) L(z)$$



m 個の特異点（可約接続）を互いに干渉しないように小さく摂動する．

$$F_D = \sigma \otimes u, \qquad \sigma \in \Omega^2(\mathrm{ad}\eta), |u| = 1$$

に対して Bianci の恒等式から次を得る． 3 章と同様の議論

$$0 = DF = d\sigma \otimes u + \sigma \otimes Du \quad \Rightarrow \quad d\sigma = 0,\ Du = 0$$

これにより $\mathrm{ad}\eta = \mathbb{R}u \oplus \zeta$ と分解し， 複体 は次の 2 つに分解する

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d_-} & \Omega^2_- & \to & 0 \\ 0 & \to & \Omega^0(\zeta) & \xrightarrow{D} & \Omega^1(\zeta) & \xrightarrow{\mathcal{D}} & \Omega^2_-(\zeta) & \to & 0 \end{array}$$

$$d_- = P_- d,\ \mathcal{D} = P_- D$$

第一の系列は index が 1. 第二の系列は index が -6
第二系列について generic な計量 g について
$h^2(g) = \dim H^2 = \dim \mathrm{Coker}\ \mathcal{D} = 0$ を目指す．

$$0 \to \Omega^0(\zeta) \xrightarrow{D} \Omega^1(\zeta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Omega^2_-(\zeta) \to 0$$

Theorem (4.15)

作用素 $D, \mathcal{D}$ は，計量 g に *smooth* に依存.

$$\overline{\lim_{g \to g_0}} h^2(g) \leq h^2(g_0)$$

$\mathcal{D}$ は *up to* ゲージ変換で定まる．空間 χ の *smooth-ness* で測られる．

証明概要：

・Smooth-ness は（line 束 λ 上での）P_F の正則値の逆像のため．

$$h^2(g) = \dim \mathrm{Ker}\ \mathcal{D}\mathcal{D}^* : \Omega^2_-(\zeta) \to \Omega^2_-(\zeta)$$

$\mathcal{D}\mathcal{D}^*$ は Elliptic なので spectrum は離散的．上半連続となる． □

$$0 \;\rightarrow\; \Omega^0(\zeta) \;\xrightarrow{D}\; \Omega^1(\zeta) \;\xrightarrow{\mathcal{D}}\; \Omega^2_-(\zeta) \;\rightarrow\; 0$$

H^1 について． $F = \sigma \otimes u$ とする ($\sigma \in \Omega^2_+$).
$A \in \Omega^1(\zeta)$ が exact $A = Dv$ とすると

$$DA = D^2 v = [F, v] = [\sigma \otimes u, v] = \sigma \otimes [u, v]$$

DA は F と parallel になる．このとき

Lemma (4.16)

Open dense な C^k 計量に対して次が成り立つ：
$A \in \Omega^1(\zeta)$ が $\mathcal{D}A = 0$ のとき，

開集合 $\{F \neq 0\}$ 上で $DA = \sigma \otimes w$ と $w \in \Omega^0(\zeta)$ を固定すれば ???

$$A = Dv, \;\; \exists v \in \Omega^0(\zeta).$$

$$0 \quad \to \quad \Omega^0(\zeta) \quad \xrightarrow{D} \quad \Omega^1(\zeta) \quad \xrightarrow{\mathcal{D}} \quad \Omega^2_-(\zeta) \quad \to \quad 0$$

Thm 4.16　$\mathcal{D}A = 0$ のとき，$DA = \sigma \otimes w$ を固定すれば $A = Dv$.

楕円型方程式　$D^*(A - Dv) = 0$　は唯一解 $v \in \Omega^0(\zeta)$ をもつ

（Ker $D = \{0\}$）

$\tilde{A} = A - Dv$ とし $= 0$ を示す．まず, $D\tilde{A}$ が F と parallel になる.

$$D\tilde{A} \;= DA - [F, v] \;= \sigma \otimes (w - [u, v]) \;= \sigma \otimes \tilde{w}$$

Open dense な計量に対し $\tilde{A}$ が harmonic であること（$\mathcal{D}\tilde{A} = D^*\tilde{A} = 0$）を示す.

Open : 等式は closed 条件，$\neq$ は open 条件.
$+$ 楕円型方程式の weak compact-ness による.

Dense : Analytic 計量 (零点が測度 0) で考える．$4\tilde{v} = -[u, \tilde{w}]$ とする．

注：u は $\mathrm{ad}\eta = \mathbb{R}u \oplus \zeta$ とした，あの u.

SU(2) の等式 $[u, -[u, \tilde{w}]] = 4\tilde{w}$ ($= 4[u, \tilde{v}]$) により

$$4D\tilde{A} \;= 4[F, \tilde{v}] \;= 4\sigma \otimes [u, \tilde{v}] \;= 4\sigma \otimes \tilde{w}$$

なので

$$[F \wedge \tilde{A}] \;= D^2\tilde{A} \;= D[F, \tilde{v}] \;= [F \wedge D\tilde{v}]$$

ここで $F = \sigma \otimes u$ ($\sigma \in \Omega^2_+, u \notin \zeta$) による $F\wedge$ は 同型 $\Omega^1(\zeta) \xrightarrow{\cong} \Omega^3(\zeta)$ を導くので，$F \neq 0$ である限り $\tilde{A} = D\tilde{v}$ を得る．

Analytic 計量を仮定したので，この等式は $\{F = 0\}$ にも拡張できて global に $D^*\tilde{A} = D^*D\tilde{v} = 0$. よって $\tilde{v} = 0$. $\tilde{A} = 0$ つまり $A = Dv$. $\square$

Theorem (4.19)

Open dense な C^k 計量に対して，各特異点 D で $h^2 = \dim H^2 = 0$.
よって $h^1 = \dim H^1_D(\zeta) = 6$.　($\Rightarrow$ 特異点は $\mathbb{C}^3/S^1 \cong$ *cone* $\mathbb{C}P^2$)

証明概要：論法は Thm 4.4 に似ている.

$$\begin{array}{rccc} Q: & \Omega^1(\zeta)\backslash\{0\}\times\mathcal{C} & \to & \Omega^0(\zeta)\oplus\Omega^2_-(\zeta) \\ & \langle A,\varphi\rangle & \mapsto & \langle D^*((\varphi^{-1})^*A), P_-((\varphi^{-1})^*DA)\rangle \end{array}$$

$\mathcal{C} = C^k(GL(TM))$ は計量 $(\varphi^* g)$ の空間.
$Q^{-1}(0) = H^1_D(\zeta)$ rel. to $\varphi^* g$ を知りたい.

0 が Q の正則値（Q の微分 δQ が全射）であることを示す.
$Q(A,\varphi) = 0$ の下で $\langle v,\Phi\rangle$ が Coker $\delta Q_{\langle A,\varphi\rangle}$ とする.

r^* を $\mathcal{C}$ の Lie 環の元（$\mathcal{C}$ 内の変分）とする.　$r^* F = 0$ は課す.
第二成分での微分 $\delta_2 Q_{\langle A,\varphi\rangle}$ に注目する.

$$\delta_2 Q_{\langle A,\varphi\rangle}(r^*) = \langle D^*((\varphi^{-1})^*(r^*A)),\ \boxed{P_-((\varphi^{-1})^*(r^*DA))}\ \rangle$$

0 が Q の正則値（Q の微分 δQ が全射）であることを示す．

$Q(A,\varphi)=0$ の下で $\langle v,\Phi\rangle$ が Coker $\delta Q_{\langle A,\varphi\rangle}$ とする． $\Phi\in\Omega^2_-(\zeta)$

$\tilde{\Phi}=\varphi^*(\Phi)$ について 3 章と同様の議論 で次を得る．

$$(1)\ Dv=0, \qquad (2)\ D^*\tilde{\Phi}=0, \qquad (3)\ (r^*DA,\tilde{\Phi})_{\varphi^*g}=0$$

(1) から $v=0$. $\because$ D は ζ では Ker を持たない．
Lemma 4.16 から $F\neq 0$ かつ $DA=\sigma\otimes w$ の領域では $A=0$.
$F\neq 0$ かつ $A\neq 0$ ($\Rightarrow DA\neq\sigma\otimes w$) の領域に注目する．座標を

$$F=\sigma^{13}\otimes u,\quad DA=\sum_{i=2}^{4}\sigma^{1i}\otimes w_i,\quad \tilde{\Phi}=\sum_{j=2}^{4}\alpha^{1j}\otimes\Phi_j,$$

ととる． $w_2\neq 0$ or $w_4\neq 0$. $\sigma^{1j}\in\Omega^2_+(\zeta)$, $\alpha^{1j}\in\Omega^2_-(\zeta)$
(3) から，3 章 p54 の frame change r^i_j により，例えば $w_2\neq 0$ なら
$(w_2,\Phi_j)=0$ を得る．つまり $\tilde{\Phi}$ は rank が退化．(2) から結局 $\tilde{\Phi}=0$.

$Q(A,\varphi)=0$ の下で $\langle v,\Phi\rangle$ が Coker $\delta Q_{\langle A,\varphi\rangle}$ とする. $\Phi\in\Omega^2_-(\zeta)$

(1) $Dv=0$, (2) $D^*\tilde{\Phi}=0$, (3) $(r^*DA,\tilde{\Phi})_{\varphi^*g}=0$

---

(3) の導出

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \left(\boxed{P_-((\varphi^{-1})^*(r^*DA))}, \Phi\right)_g \\ &= \int_M (r^*DA, \varphi^*\Phi)_{\varphi^*g} \\ &= \int_M (r^*DA, \tilde{\Phi})_{\varphi^*g} \end{aligned}$$

［講演後のコメント］ 当日の２章３章の講演を受けて、また 講演中にいただいた指摘を受けて、事後に資料の一部を修正しました．後半の、計量摂動に関する部分は、この図書とは異なる方法があるそうです．勉強不足の点が多く申し訳ありません．

ありがとうございました．