Instantons and Four-Manifolds を読む

山田 裕一　Yuichi YAMADA　（電気通信大学）

2021 年 2 月

講演の準備中に気づいたことをいくつかメモにまとめました．
わたくしの担当は 4 章 Cones on $\mathbb{C}P^2$.

1　開写像定理

p66 の中央辺りで登場する．
無限次元の空間を扱うので，位相（連続性，完備性など）をめぐる議論が必要．

定理 1. 開写像定理
X, Y を Banach 空間（完備ノルム距離空間）とする．
全射の連続線形作用素 $A : X \to Y$ は開写像である．

証明. （Wikipedia の証明に納得したので、それをもとに構成）

A が X の単位球体を Y の原点の近傍に写すことを示せば良い．
U を X の単位球，V を Y の単位球とする．

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} kU$$

であり，A は全射なので

$$Y = A(X) = A\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} kU\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A(kU)$$

である．
(1) ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して，$A(kU)$ の閉包は内点をもつ：

$$\exists c \in A(kU), \exists r > 0 \text{ s.t. } B(c, r) \subset \overline{A(kU)}$$

すべての $A(kU)$ が疎集合 (閉包の内部が空集合) だとすればベールのカテゴリー定理 (Banach 空間は可算個の疎集合の和集合になり得ない) に矛盾するため．

(2) $\delta = r/(2k)$ とする．$V \subset \overline{A(\delta^{-1}U)}$
　$v \in V$ とする．$c \in \overline{A(kU)}$ かつ $c + rv \in \overline{A(kU)}$ なので，$rv \in \overline{A(2kU)}$.

$$rv \;=\; (c+rv) - c \;\in \overline{A(kU)} + \overline{A(kU)} \;\subset \overline{A(2kU)}$$

A は線形写像なので $1/r$ をかけて $v \in \overline{A(\delta^{-1}U)}$.

(3) 任意の $y \in Y$ および $\forall \varepsilon > 0$ に対し

$$\|x\| < \delta^{-1}\|y\| \quad \text{かつ} \quad \|y - Ax\| < \varepsilon$$

となる x が存在する．

(4) 任意の $y \in \delta V$ に対して $Ax = y$ となる $x \in 2U$ が存在する．
　構成方法：まず (3) により $\|x_1\| < 1$ かつ $\|y - Ax_1\| < \delta/2$ をみたす x_1 が存在する．
　次に，$y - Ax_1$ に対して (3) を適用して

$$\|x_2\| < 1/2 \quad \text{かつ} \quad \|(y - Ax_1) - A(x_2)\| < \delta/2^2$$

となる x_2 が存在する．以下同様に，帰納的に

$$\|x_{n+1}\| < 1/2^n \quad \text{かつ} \quad \|y - A(x_1 + \cdots + x_n) - Ax_{n+1}\| < \delta/2^{n+1}$$

となる x_{n+1} を取ることができて

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

とすると $\{s_n\}$ はコーシー列である．完備性から s_n はある $x \in X$ に収束し，As_n は y に向かう．
A は連続なので $Ax = y$ である．また，

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|s_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < 2$$

(5) (4) は $\delta V \subset A(2U)$ を意味し，$(\delta/2)V \subset A(U)$ が示された． □

2　複素２階ベクトル束について

３章 p47 を読んでいて，講演者陣 から注意喚起があった

$$\eta \text{ と } \mathrm{ad}\ \eta \text{ が混乱していないか？}$$

少し考えてみた．
Lie 群 SU(2)、その Lie 環 su(2) は次のように表すことができる

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}(2) &= \left\{ g = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \middle| z, w \in \mathbb{C},\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \\ \mathrm{su}(2) &= \left\{ v = \begin{bmatrix} ix & y \\ -\bar{y} & -ix \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

Lie 群 $G = \mathrm{SU}(2)$ の Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathrm{su}(2)$ への Adjoint 作用は共役

$$g \circ v = g^{-1} v g$$

SU(2) の $\mathbb{C}^2$ への作用は、通常の行列とベクトルの積

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} zy_1 + wy_2 \\ -\bar{w}y_1 + \bar{z}y_2 \end{bmatrix}$$

さて、G 主束 P に対して

$$\eta = P \times_G \mathbb{C}^2 \quad \text{と} \quad \mathrm{ad}\ \eta = P \times_G \mathfrak{g}$$

を比較する．

> 笹平さんの指摘（改訂）：ad η に 1 つの 0 にならない section e がとれるとき，分割は ad $\eta = \varepsilon \oplus L^{\otimes 2}$（$\varepsilon$ は自明束、L は何らかの複素 line 束）となり、これに対応する η の分解は $\eta = L \oplus L^{-1}$.

ad η に 0 にならない section e がとれたとする．局所的な自明化（座標）でこれを

$$\left\{ x \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{su}(2)$$

に合わせると、構造群が次の部分群（$\cong U(1)$）に制限できる

$$U(1) = \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{bmatrix} \middle| z \in \mathbb{C},\ |z|^2 = 1 \right\} \subset \mathrm{SU}(2)$$

理由

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (|z|^2 - |w|^2)i & 2i\bar{z}w \\ 2iz\bar{w} & -(|z|^2 - |w|^2)i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

これを解くと（id を含む成分は） $w=0$. □

これにより，対応する η がある複素 line 束 L とその L^{-1} の和 $L\oplus L^{-1}$ に分解することがわかる．一方 ad η で，e の直交補空間 $e^{\perp}$ への部分群 $U(1)$ の作用を調べると

$$e^{\perp}=\left\{\begin{bmatrix}0 & y\\ -\bar{y} & 0\end{bmatrix}\middle|\, y\in\mathbb{C}\right\}\subset \mathrm{su}(2)$$

$$\begin{bmatrix}z & 0\\ 0 & \bar{z}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & y\\ -\bar{y} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z & 0\\ 0 & \bar{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \bar{z}^2y\\ -z^2\bar{y} & 0\end{bmatrix}$$

となるので $e^{\perp}$ は複素 line 束 $(L^{-1})^{\otimes 2}$ となる．L と L^{-1} を交代すれば良い． □

疑問：複素平面束（$\mathbb{C}^2$ 束）η は hermite 計量を使って 構造群を $U(2)$ まで制限できる．~~が、さらに SU(2) まで制限できる場合には、複素 line 束 L とその L^{-1} の和 $L\oplus L^{-1}$ に分解する（特に $c_1(\eta)=c_1(L)+c_1(L^{-1})=0$ ）のではなかろうか.~~
が、さらに SU(2) まで制限できる場合には、束変換行列の行列式が $\det=1$ となるので「determinant line 束 $\det\eta$」が自明になり，$c_1(\eta)=c_1(\det\eta)=0$. しかし，複素平面束 η が line 束 L とその L^{-1} の和 $L\oplus L^{-1}$ に分解するとは限らない．

松尾様，他の皆様，ご指摘をありがとうございました．

3　いくつかの記号

記号を具体的にイメージするために．
$G = \mathrm{SU}(2)$ $\mathfrak{g} = \mathrm{su}(2)$ とする．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SU}(2) &= \left\{ g = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \middle| \, z, w \in \mathbb{C},\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \\
\mathrm{su}(2) &= \left\{ v = \begin{bmatrix} ix & y \\ -\bar{y} & -ix \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{C} \right\}
\end{aligned}
$$

（有向）４次元多様体 M の座標 $U \cong \mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ 上で（局所的に）

$$
\begin{array}{lll}
\Omega^0 & = \{f\}, \quad f = f(x_1, \ldots, x_4) & \\
\Omega^1 & = \{\mu = f_1\, dx_1 + \cdots + f_4\, dx_4\} & \\
\Omega^2 & = \{\omega = f_{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + \cdots & \cdots + f_{34}\, dx_3 \wedge dx_4\} \\
\Omega^2_+ & = \{\omega^+ = f_{12}\, \sigma^{12} + f_{13}\, \sigma^{13} + f_{14}\, \sigma^{14}\}, & \sigma^{12} = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \\
 & *\omega^+ = \omega^+ & \sigma^{13} = dx_1 \wedge dx_3 + dx_4 \wedge dx_2 \\
 & & \sigma^{14} = dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3 \\
\Omega^2_- & = \{\omega^- = f_{12}\, \alpha^{12} + f_{13}\, \alpha^{13} + f_{14}\, \alpha^{14}\}, & \alpha^{12} = dx_1 \wedge dx_2 - dx_3 \wedge dx_4 \\
 & *\omega^- = -\omega^- & \alpha^{13} = dx_1 \wedge dx_3 - dx_4 \wedge dx_2 \\
 & & \alpha^{14} = dx_1 \wedge dx_4 - dx_2 \wedge dx_3
\end{array}
$$

G 主束 P に対して
　　$\eta = P \times_G \mathbb{C}^2$　は $\mathbb{C}^2$ 束
　$\mathrm{ad}\,\eta = P \times_G \mathfrak{g}$　は $\mathrm{su}(2)$ 束

例えば，$\Omega^2_+(\mathrm{ad}\eta)$ の元は，局所的には次のような形をしている

$$
\begin{bmatrix} i\omega^+_{11} & \omega^+_{12r} + \omega^+_{12i} \\ -\omega^+_{21r} + \omega^+_{21i} & -i\omega^+_{22} \end{bmatrix}
$$

各成分 ω^+_{ij*} は Ω^2_+ の元　$f_{12}\, \sigma^{12} + f_{13}\, \sigma^{13} + f_{14}\, \sigma^{14}$ の形

~~ゲージ群：$\mathcal{G} = C^\infty(M, G) = C^\infty(M, \mathrm{SU}(2))$~~
ゲージ変換 ($\mathcal{G}$ の元)　a cross section of Aut $\eta = P \times_G G$
　局所的には $z, w : U \to \mathrm{SU}(2)$ とみて　$g = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$ $(|z|^2 + |w|^2 = 1)$

$$\mathrm{su}(2) = \left\{ v = \begin{bmatrix} ix & y \\ -\bar{y} & -ix \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{C} \right\}$$

$\Omega^0(\mathrm{ad}\ \eta)$ の元　（局所的に $U \subset M^4$）

$f_x, f_{y_1}, f_{y_2} : U \to \mathbb{R}$,　（$f_y = f_{y_1} + i f_{y_2} : U \to \mathbb{C}$）とみて

$$u = \begin{bmatrix} i f_x & f_{y_1} + i f_{y_2} \\ -f_{y_1} + i f_{y_2} & -i f_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i f_x & f_y \\ -\overline{f_y} & -i f_x \end{bmatrix}$$

$\Omega^1(\mathrm{ad}\ \eta)$ の元　（局所的に）

$$A = \begin{bmatrix} i\mu_x & \mu_{y_1} + i\mu_{y_2} \\ -\mu_{y_1} + i\mu_{y_2} & -i\mu_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\mu_x & \mu_y \\ -\overline{\mu_y} & -i\mu_x \end{bmatrix}$$

ad η の接続 $D = d + A$

$$\begin{aligned} Du &= du + [A, u] \\ &= \begin{bmatrix} idf_x & df_y \\ -\overline{df_y} & -idf_x \end{bmatrix} \qquad df_y = df_{y_1} + i df_{y_2} \\ &\quad + \begin{bmatrix} i\mu_x & \mu_y \\ -\overline{\mu_y} & -i\mu_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i f_x & f_y \\ -\overline{f_y} & -i f_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i f_x & f_y \\ -\overline{f_y} & -i f_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\mu_x & \mu_y \\ -\overline{\mu_y} & -i\mu_x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

問：可約接続とは，局所座標でいうと どんな接続なのだろうか.

$A = \begin{bmatrix} i\mu_x & 0 \\ 0 & -i\mu_x \end{bmatrix}$　のような接続（$\mu_y = 0$）だろうか？

変分の方法（$s = 1 \in \mathcal{G}$ の近くで）　　　　3 章の p49 ↑ l4, 4 章では p65 ↓ l5

$s \to 1 + \delta_s$

$s^{-1}Ds \quad \longrightarrow \quad (1-\delta_s)D(1+\delta_s) = D - \delta_s D + D\delta_s$ +(2 次以上)

D は "微分" 作用素であり，$u \in \Omega^0(\eta)$ に対して Leibniz 則

$$(Ds)(u) = D(su) = (D(s))u + s(Du)$$

があり，上記の項 $D\delta_s$ は　$D\delta_s = D(\delta_s) + \delta_s D$　となる．結果的に

変分は

$$\begin{array}{rcl} s^{-1}Ds & \longrightarrow & D - \delta_s D + D\delta_s + (\text{2 次以上}) \\ & = & D - \delta_s D + D(\delta_s) + \delta_s D + (\text{2 次以上}) \\ & = & D + D(\delta_s) + (\text{2 次以上}) \end{array}$$

（違うかも知れません.）

謝辞

研究集会「微分トポロジー」世話人の丹下基生氏（筑波大），安部哲也氏（立命大）に感謝いたします.