Freed-Uhlenbeck
"Instantons and Four-manifolds"

§6. Introduction to Taubes's theorem

佐藤光樹（東大・学振PD）

「微分トポロジー'21」 2021/2/22

---

§6.0. Outline

復習

- M : closed, simply-conn, oriented 4-mfd w/ pos. definite intersection form

$$+ \begin{cases} g : \text{Riem. metric} \\ \eta : \text{主 } SU(2) \text{束 over } M \end{cases} \left(\text{w/ } k := -c_2(\eta)[M] = 1 \right)$$

Chern number

$\Omega^2(\eta) = C^\infty(\mathrm{ad}\,\eta \otimes \Lambda^2 T^*M)$: sections

$$* : \Omega^2(\eta) \longrightarrow \Omega^2(\eta) : \text{star operator}$$

- D : conn. on η

$$F_D \in \Omega^2(\eta) : \text{curvature}$$

$$D : \text{self-dual} \overset{\text{def}}{\iff} F_D = * F_D$$

↑ Yang-Mills eq.

$\mathcal{G} := C^{\infty}(\eta)$: gauge group

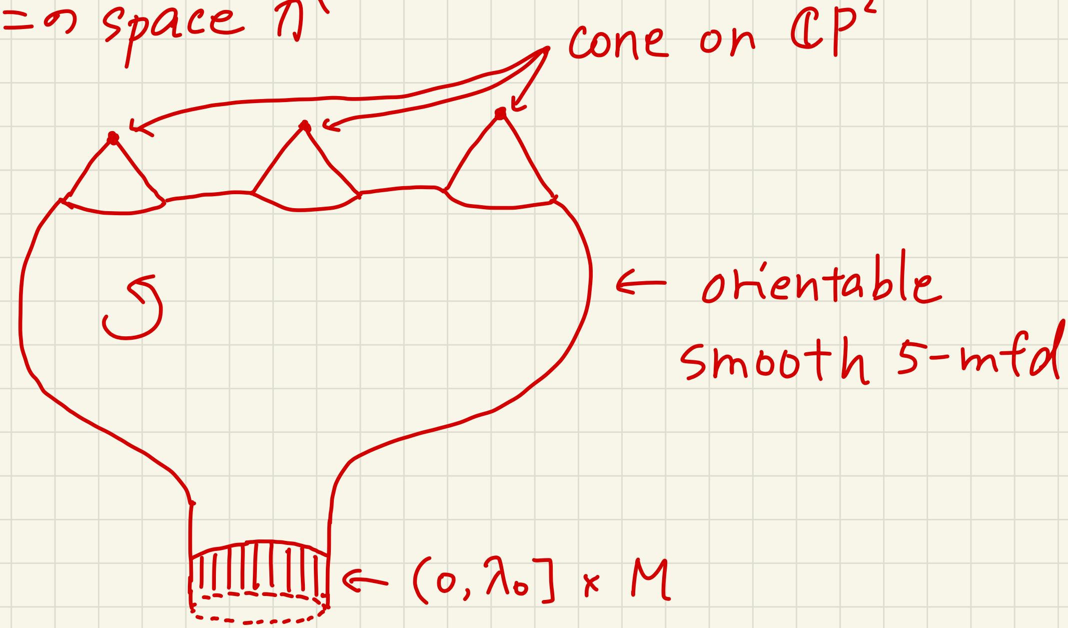
$\mathcal{A} := \{ D : \text{conn. on } \eta \} \curvearrowleft \mathcal{G}$

これは{self-dual conn}を保つ

$\mathcal{M} := \{ D \in \mathcal{A} \mid F_D = *F_D \} / \mathcal{G}$

: moduli space

このspaceが



になることを示すのが目標

§3 - §5 では

$\mathcal{M}$: smooth, orientable mfd
w/ finite singularity

まで確かめられたが、まだ

$\mathcal{M} = \phi$ （特に reducible のないとき）

の可能性も残っている！

Taubes の定理によって、

$\mathcal{M} \neq \phi$ （実は $(0, \lambda_0) \times M \subset \mathcal{M}$ ）

が示される。

§6 はその導入。

§6の流れ

§6.1 … S^4上の self-dual conn. を具体的に構成する.

$\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$, $S^4 \cong \mathbb{HP}^1$, $su(2) \cong \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ の対応から, 性質のよい bdl η_{S^4} で self-dual conn. Ⓗ が構成できる.

さらに, $T_\lambda : S^4 \to S^4 : [x:1] \mapsto [\lambda x : 1]$ を使って, family

$$\{ \Theta_\lambda = T_\lambda^* \Theta \}_{\lambda > 0} \subset \mathcal{M}(S^4)$$ を構成する.

($\lambda \to 0$ のとき Θ_λ は $[0:1] \in S^4 = \mathbb{HP}^1$ 上に局所化する)

§6.2 ..., $^\forall y \in M$ に対して,

$\varphi_{\lambda,y} : M \to S^4$ s.t. $\begin{cases} \varphi_{\lambda,y}(y) = [0:1] \\ ^\exists U : y \text{ の nbd}, \\ \varphi_{\lambda,y}(M \setminus U) = \{[1:0]\} \end{cases}$

を使って η_{S^4} と Θ の

pull-back

$\varphi_{\lambda,y}^* T_\lambda^* (\eta_{S^4})$

$D_\lambda := \varphi_{\lambda,y}^* T_\lambda^* (\Theta) = \varphi_{\lambda,y}^* (\Theta_\lambda)$

をとると, $1 < {}^\forall p \leq \infty$, $^\exists c_1(p), c_2(p) > 0$

$\| F_{D_\lambda} \|_{L^p} \leq c_1(p) \lambda^{\frac{4}{p} - 2}$

$\| (F_{D_\lambda})_- \|_{L^p} \leq c_2(p) \lambda^{\frac{2}{p}}$

が成り立つ.

§6.1. Instantons on S^4.

$\mathbb{R}^4$上の su(2)-valued forms

《Overview》

重要なのは $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$, $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} \cong su(2)$ の対応.
quoternions
これを用いると

su(2)-valued n-form

$\iff$ $\mathbb{H}$-valued n-formで係数のReが0

と捉えられる. また,

$$C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) = C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{H}) = \Omega^0(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{H} \xrightarrow{d \otimes 1} \Omega^1(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{H}$$

というプロセスで $\mathbb{H}$-valued 1-formが得られる.

$\mathbb{H}$ と su(2)

- $\mathbb{H} = \{ x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \mid x_i \in \mathbb{R} \}$,

  where $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

a \ b	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

"ab" の表

- $\mathrm{Re}\, x := x_1$
- $\mathrm{Im}\, x := x_2 i + x_3 j + x_4 k$
- $\overline{x} := x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k$
- $ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik$ より

$$xy = (x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k)(y_1 + y_2 i + y_3 j + y_4 k)$$

$$= \left(x_1 y_1 - \sum_{i=2}^{4} x_i y_i\right) + \{(x_1 y_2 + x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3)\} i$$

$$+ \{(x_1 y_3 + x_3 y_1) + (x_4 y_2 - x_2 y_4)\} j$$

$$+ \{(x_1 y_4 + x_4 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)\} k$$

反対称

特に、$x\overline{x} = \overline{x} x = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = |x|^2$

$$\rightsquigarrow \quad x^{-1} = \frac{\overline{x}}{|x|^2}$$

- $\mathrm{Im}\, \mathbb{H} := \{ x \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}\, x = 0 \}$ とおると、

$x, y \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \Rightarrow \mathrm{Re}(xy - yx) = 0 \Rightarrow xy - yx \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$

より、$\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ は Lie alg.

- $$\mathfrak{su}(2) = \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \overline{A}^T = -A \\ \operatorname{tr} A = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} ai & b+ci \\ -b+ci & -ai \end{bmatrix} \in M_2(n) \right\}$$

$$= \left\langle \underset{\mathbb{i}}{\underset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbb{j}}{\underset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbb{k}}{\underset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}}} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$!!

Prop

$\langle E_2 \rangle_{\mathbb{R}} + su(2)$ は $M_2(\mathbb{C})$ の sub $\mathbb{R}$-alg.

∵ $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -E_2$ をみたす

(例えば
$\mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = -E_2$)

よって

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$-E_2$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$-E_2$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$-E_2$

で,

$xy = (x_1 E_2 + x_2 \mathbf{i} + x_3 \mathbf{j} + x_4 \mathbf{k})(y_1 E_2 + y_2 \mathbf{i} + x_3 \mathbf{j} + x_4 \mathbf{k})$

は $E_2, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ の積の線形和に展開できるから $xy \in \langle E_2 \rangle_{\mathbb{R}} \oplus su(2)$.

//

Prop

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{H} & & \langle E_2 \rangle_{\mathbb{R}} + \mathfrak{su}(2) \\
\| & & \| \\
\langle 1, i, j, k \rangle_{\mathbb{R}} & \xrightarrow[\text{as non-comm. } \mathbb{R}\text{-alg.}]{\cong} & \langle E_2, \mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k} \rangle \\
\cup & & \cup \\
\langle i, j, k \rangle_{\mathbb{R}} & & \langle \mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k} \rangle_{\mathbb{R}} \\
\| & & \| \\
\operatorname{Im} \mathbb{H} & \xrightarrow[\text{as Lie alg.}]{\cong} & \mathfrak{su}(2)
\end{array}
$$

シンプレクティック群（= "四元ユニタリ群 $U(n, \mathbb{H})$"）

また、$Sp(n) := \left\{ A \in GL(n, \mathbb{H}) \;\middle|\; A\overline{A}^T = E_n \right\}$

とすると、$Sp(1) = \left\{ x \in \mathbb{H} \;\middle|\; \overline{x} x = 1 \right\} \ (= S^3)$

$\downarrow \cong$ as Lie group

$$SU(2) = \left\{ A \in GL(2, \mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} A\overline{A}^T = E_2 \\ \det A = 1 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \;\middle|\; z, w \in \mathbb{C},\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 E_2 + x_2 \mathbb{i} \\ + x_3 \mathbb{j} + x_4 \mathbb{k} \end{array} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1 \right\}$$

$dx, d\bar{x} \in \Omega^1(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{H}$

$$\begin{cases} x : & \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{H} \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \\ \bar{x} : & \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{H} \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \quad dx, d\bar{x} \in \Omega^1(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{H}$$

where
$$\begin{cases} dx = dx_1 + dx_2 i + dx_3 j + dx_4 k \\ d\bar{x} = dx_1 - dx_2 i - dx_3 j - dx_4 k \end{cases}$$

このとき,

$$x\bar{x} = (x_1x_1 + \sum_{i=2}^{4} x_ix_i) + \{(-x_1x_2 + x_2x_1) - (x_3x_4 - x_4x_3)\}i$$
$$+ \{(-x_1x_3 + x_3x_1) - (x_4x_2 - x_2x_4)\}j$$
$$+ \{(-x_1x_4 + x_4x_1) - (x_2x_3 - x_3x_2)\}k$$

を参照すると

(6.1)

$\Omega^2_+(\mathbb{R}^4)$ の basis

$$dx \wedge d\bar{x} = -2\left\{\begin{array}{l}(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)i \\ + (dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4)j \\ + (dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3)k\end{array}\right\}$$

$$= *(dx \wedge d\bar{x}) \quad : \text{self-dual}$$

$\Omega^2_-(\mathbb{R}^4)$ の basis

$$d\bar{x} \wedge dx = 2\left\{\begin{array}{l}(dx_1 \wedge dx_2 - dx_3 \wedge dx_4)i \\ + (dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4)j \\ + (dx_1 \wedge dx_4 - dx_2 \wedge dx_3)k\end{array}\right\}$$

$$= -*(d\bar{x} \wedge dx) \quad : \text{anti-self-dual}$$

また,

$$dx \wedge d\bar{x},\ d\bar{x} \wedge dx \in \Omega^2(\mathbb{R}^4) \otimes \mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \Omega^2(\mathbb{R}^4) \otimes su(2)$$

ここで，su(2) 上の内積 (ref. (2.12)) は

$$(A, B) = -\mathrm{tr}(AB)$$

で，$\mathrm{tr}(E_2) = 2$, $\mathrm{tr}(\mathbb{i}) = \mathrm{tr}(\mathbb{j}) = \mathrm{tr}(\mathbb{k}) = 0$

だから，

$$-\mathrm{tr}(AB) = -\mathrm{tr}((a_2\mathbb{i} + a_3\mathbb{j} + a_4\mathbb{k})(b_2\mathbb{i} + b_3\mathbb{j} + b_4\mathbb{k}))$$

$$= 2(a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)$$

$$= 2\mathrm{Re}\left((a_2 i + a_3 j + a_4 k)\overline{(b_2 i + b_3 j + b_4 k)}\right)$$

よって，$-\mathrm{tr}(AB)$ は $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ 上では

$2\mathrm{Re}(x\bar{y})$ に対応する．

したがって，$\mathrm{vol} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ として

(6.2)

$$\|dx \wedge d\bar{x}\|^2 \mathrm{vol} = 2\mathrm{Re}\left\{(dx \wedge d\bar{x}) \wedge \overline{*(dx \wedge d\bar{x})}\right\}$$

$$= 2\mathrm{Re}\left\{(dx \wedge d\bar{x}) \wedge \overline{(dx \wedge d\bar{x})}\right\}$$

$$= 2 \cdot (-2)^2 \cdot \left\{\begin{array}{l}(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)^2 \\ + (dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4)^2 \\ + (dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3)^2\end{array}\right\}$$

$$= 8 \cdot (2 + 2 + 2)\,\mathrm{vol} = 48\,\mathrm{vol}.$$

また，

$$\|d\bar{x}\wedge dx\|^2 \mathrm{vol} = 2\mathrm{Re}\{(d\bar{x}\wedge dx)\wedge \overline{*(d\bar{x}\wedge dx)}\}$$

$$= -2\mathrm{Re}\{(d\bar{x}\wedge dx)\wedge \overline{(d\bar{x}\wedge dx)}\}$$

$$= -2\cdot 2^2 \cdot \left\{ \begin{aligned} &(dx_1\wedge dx_2 - dx_3\wedge dx_4)^2 \\ &+(dx_1\wedge dx_3 + dx_2\wedge dx_4)^2 \\ &+(dx_1\wedge dx_4 - dx_2\wedge dx_3)^2 \end{aligned} \right\}$$

$$= -8\cdot(-2-2-2)\mathrm{vol} = 48\mathrm{vol}.$$

S^4上の主$SU(2)$束(w/ Chern number $k=1$)

《Overview》

$S^4 \cong \mathbb{H}P^1$, $Sp(1)=SU(2)$ という事実に注目すれば、これはまさに

$$\mathbb{R}^2 \supset S^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^1 \cong S^1 \ : O(1)=\mathbb{Z}_2\text{-bdl}$$

$$\mathbb{C}^2 \supset S^3 \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \cong S^2 : U(1)\text{-bdl}$$

の analogy

$$\mathbb{H}^2 \supset S^7 \longrightarrow \mathbb{H}P^1 \cong S^4 : Sp(1)(=SU(2))\text{-bdl}$$

として得られる。

$S^4 \cong \mathbb{H}P^1$

$$\mathbb{H}P^1 := \mathbb{H}^2 \setminus \{0\} \big/ \langle q_1, q_2 \rangle \sim \langle pq_1, pq_2 \rangle \ (p \in \mathbb{H} \setminus \{0\})$$

$$U_\alpha = \{ [1, q_2] \in \mathbb{H}P^1 \} \xrightarrow[\cong]{\varphi_\alpha} \{ q_2 \in \mathbb{H} \} = \mathbb{H}$$

$$U_\beta = \{ [q_1, 1] \in \mathbb{H}P^1 \} \xrightarrow[\cong]{\varphi_\beta} \{ q_1 \in \mathbb{H} \} = \mathbb{H}$$

$$U_\alpha \cap U_\beta = \{ [q_1, q_2] \in \mathbb{H}P^1 \mid q_1, q_2 \neq 0 \}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(q) &= \varphi_\beta([1, q]) \\ &= \varphi_\beta([q^{-1}, 1]) \\ &= q^{-1} \end{aligned}$$

一方，$S^4 = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid |x|^2 = 1\}$ については

$$V_\alpha = S^4 \setminus \{(0,0,0,0,1)\} \xrightarrow[\cong]{\psi_\alpha} \mathbb{H}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longmapsto \frac{x_1}{1-x_5} + \frac{x_2}{1-x_5} i + \frac{x_3}{1-x_5} j + \frac{x_4}{1-x_5} k$$

$$V_\beta = S^4 \setminus \{(0,0,0,0,-1)\} \xrightarrow[\cong]{\psi_\beta} \mathbb{H}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longmapsto \frac{x_1}{1+x_5} - \frac{x_2}{1+x_5} i - \frac{x_3}{1+x_5} j - \frac{x_4}{1+x_5} k$$

$$V_\alpha \cap V_\beta = S^4 \setminus \{(0,0,0,0,\pm 1)\}$$

ここで，$q \in \psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) = \mathbb{H} \setminus \{0\}$，

$q = \psi_\alpha(x)$ とすると，

$$q \cdot (\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(q)) = \psi_\alpha(x) \cdot \psi_\beta(x)$$

$$= \frac{1}{1-x_5^2}(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k)\overline{(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i^2}{1-x_5^2} = 1.$$

よって，$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(q) = q^{-1}$.

$\pi : S^7 \to \mathbb{H}P^1$

$$\tilde{\pi} : \mathbb{H}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{H}P^1, \ \langle q_1, q_2 \rangle \mapsto [q_1, q_2]$$

の S^7 への制限 $\tilde{\pi}|_{S^7}$ を π とかくと，

$$\pi^{-1}([q_1, q_2]) = \tilde{\pi}^{-1}([q_1, q_2]) \cap S^7$$

$$= \{ \langle pq_1, pq_2 \rangle \in \mathbb{H}^2 \setminus \{0\} \mid p \in \mathbb{H} \setminus \{0\} \} \cap S^7$$

$$= \left\{ \left\langle p \frac{q_1}{\sqrt{|q_1|^2 + |q_2|^2}}, p \frac{q_2}{\sqrt{|q_1|^2 + |q_2|^2}} \right\rangle \middle| \ p \in Sp(1) = SU(2) \right\} \cong SU(2)$$

$p \in \mathbb{H}, |p|^2 = 1$

(∵ $|pq|^2 = pq\overline{pq} = pq\bar{q}\bar{p} = p|q|^2\bar{p} = |p|^2|q|^2$

より　$|pq_1|^2 + |pq_2|^2 = |p|^2(|q_1|^2 + |q_2|^2)$.

よって，

$$\langle pq_1, pq_2 \rangle \in S^7 \iff |p| = \frac{1}{\sqrt{|q_1|^2 + |q_2|^2}}$$

$$\iff {}^\exists p' \in SU(2), \quad p = \frac{p'}{\sqrt{|q_1|^2 + |q_2|^2}}$$
)

よって、$SU(2) \curvearrowright S^7$, $p \cdot \langle q_1, q_2 \rangle = \langle pq_1, pq_2 \rangle$

とすれば fiber preserving で、

fiber上で free かつ transitive

$\rightsquigarrow$ $\pi : S^7 \longrightarrow \mathbb{H}P^1 (\cong S^4)$ は 主$SU(2)$束. ← η_{S^4} とかく

η_{S^4} は (2.9) の意味で $k=1$ bdl. すなわち,

$$k = -c_{\not{1}\,2}(\eta_{S^4})[S^4] = 1$$ となる.

(証明は (6.6) で.)

${}^{\eta}S^4$ 上の self-dual conn.

《Overview》

行列の積によって定まる action

$S^7 \curvearrowleft Sp(2)$ は isometry かつ transitive で、

$$TS^7_{\langle q_1, q_2 \rangle} = VTS^7_{\langle q_1, q_2 \rangle} \oplus (VTS^7_{\langle q_1, q_2 \rangle})^{\perp}$$

によって $Sp(2)$-action 不変な $SU(2)$-conn. Θ が定まる

Θ の curvature Ω については

$$\Omega_{\langle 0,1 \rangle} = dq_1 \wedge d\bar{q}_1 \ : \text{self-dual}$$

となり、$Sp(2)$-action によって

Ω は全域で self-dual とわかる

$S^7 \curvearrowleft Sp(2)$

- $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}$, $(\langle p_1, p_2 \rangle, \langle q_1, q_2 \rangle) = p_1 \overline{q_1} + p_2 \overline{q_2}$

$$= \langle p_1, p_2 \rangle \cdot \overline{\langle q_1, q_2 \rangle}^T$$

- $Sp(2) := \{ A \in M_2(\mathbb{H}) \mid A \overline{A}^T = E_2 \}$

$x, y \in \mathbb{H}$について一般に$xy \neq yx$だから

$\mathbb{H}$-matrixについても一般に$(AB)^T \neq B^T A^T$に注意!

一方$\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$だから$\overline{(AB)}^T = \overline{B}^T \overline{A}^T$は成り立つ.

よって${}^\forall A \in Sp(2)$について

$(\langle p_1, p_2 \rangle A, \langle q_1, q_2 \rangle A)$

$$= \langle p_1, p_2 \rangle A \overline{A}^T \overline{\langle q_1, q_2 \rangle}^T = (\langle p_1, p_2 \rangle, \langle q_1, q_2 \rangle)$$

特に, $\langle q_1, q_2 \rangle \in S^7 \Rightarrow \langle q_1, q_2 \rangle A \in S^7$

また, $\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{R}^8$上の実内積は$\mathrm{Re}(\langle p_1, p_2 \rangle, \langle q_1, q_2 \rangle)$と一致するから, その意味でも$S^7 \curvearrowleft Sp(2)$は isometry

さらに，

$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus (\mathbb{C} \cdot j) \quad \left(x = (x_1 + x_2 i) + (x_3 + x_4 i) j \right)$

に注目して ${}^\forall \langle h_1, h_2 \rangle \in S^7$ について

$h_\mu = h_{\mu 1} + h_{\mu 2} j \quad (h_{\mu\nu} \in \mathbb{C})$ と表すとき，

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \begin{cases} \langle 1, 0 \rangle \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ \dfrac{\begin{pmatrix} -h_{11}\overline{h_{21}} \\ -\overline{h_{12}} h_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h_{12}\overline{h_{21}} \\ +\overline{h_{11}} h_{22} \end{pmatrix} j}{|h_1|^2} & 1 \end{bmatrix} & (\text{if } h_1 \neq 0) \\ \langle 1, 0 \rangle \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & \dfrac{\begin{pmatrix} -h_{21}\overline{h_{11}} \\ -\overline{h_{22}} h_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h_{22}\overline{h_{11}} \\ +\overline{h_{21}} h_{12} \end{pmatrix} j}{|h_1|^2} \end{bmatrix} & (\text{if } h_2 \neq 0) \end{cases}$$

(の $Sp(2)$ ∋)

と書けるから S^7 の $Sp(2)$: transitive.

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{bmatrix} \in Sp(2)$$

$$\iff \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{21} & h_{22} \\ -\overline{h_{12}} & \overline{h_{11}} & -\overline{h_{22}} & \overline{h_{21}} \\ h_{31} & h_{32} & h_{41} & h_{42} \\ -\overline{h_{32}} & \overline{h_{31}} & -\overline{h_{42}} & \overline{h_{41}} \end{bmatrix} \in U(4)$$

なので、$\langle h_1, h_2 \rangle \in S^7$, $h_1 \neq 0$ ならば

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{21} & h_{22} \\ -\overline{h_{12}} & \overline{h_{11}} & -\overline{h_{22}} & \overline{h_{21}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

の3行目に

直交化法を適用すれば h_3, h_4 が求まる //

Connection Ⓗ

$T\mathbb{H}^2_{\langle q_1, q_2\rangle} \cong \mathbb{H}^2$ の同一視のもとで

$$TS^3_{\langle 1,0\rangle} = \{\langle p, x\rangle \in \mathbb{H}^2 \mid p \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H},\ x \in \mathbb{H}\}$$

$$VTS^3_{\langle 1,0\rangle} = \{\langle p, 0\rangle \mid p \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}\}$$

実直交補空間

$$(VTS^3_{\langle 1,0\rangle})^{\perp} = \{\langle 0, x\rangle \mid x \in \mathbb{H}\}$$

ここに $Sp(2)$ の元を作用させれば、
$^\forall\langle q_1, q_2\rangle \in S^7$ で分解

$$TS^3_{\langle q_1,q_2\rangle} = VT$$