# Instantons and Four-Manifolds §3

丹下基生

筑波大学

2021/2/21

# 目次

# §3.1 接続、ゲージ変換群の接空間

## ベクトル束

$M$：4 次元多様体
$G$：リー群
$P \to M$：$M$ 上の主 $G$ 束
$V$：ベクトル空間
$\rho : G \to Aut(V)$ (表現)
$\eta$：$M$ 上の主 $G$ 束に同伴する 2 次元ベクトル束。

$$\eta = P \times_G V = P \times V / \sim \quad (u, v) \sim (u \cdot s, \rho(s^{-1}) v)$$

# ベクトル束上のゲージ変換

$\eta$ : $M$ 上の主 $G$ 束に同伴するベクトル束。
$\eta_x = \pi^{-1}(x)$ とおく。

## ゲージ変換群

$$\mathcal{G} = \{s : \eta \to \eta | \pi \circ s(p) = \pi(p), s|_{\eta_x} : \eta_x \to \eta_x \text{は同型写像}\}$$

を**ゲージ変換群**という。
ゲージ変換は、$Aut(V)$ 束

$$Aut(\eta) = P \times_{Ad} Aut(V)$$

の $C^\infty$ 切断である。$C^\infty$ 切断を $\Gamma(Aut(\eta))$ とかく。

($\pi : E \to B$ の $C^\infty$ 切断とは $s : B \to E$($C^\infty$ 級写像) であって $\pi \circ s = id_B$ を満たすもの。)

# ソボレフ空間



$\forall \sigma, \tau \in \mathcal{G}$

$$(\sigma,\tau)_\ell = \sum_{i\le \ell}\int_M (D^i\sigma, D^i\tau)_g$$

$\mathcal{G}$ の $\ell > 2$ を満たす整数を用いた内積。
$H_\ell(Aut(\eta))$ : $||\cdot||_\ell$ を用いた完備化。

$$\mathcal{G} = \Gamma(P\times_{Ad} Aut(V)) \subset H_\ell(Aut(\eta)) =: \mathcal{G}_\ell$$

とおく。$\mathcal{A}_{\ell-1}$ も同様の意味。

**事実 1**

十分大きい $\ell$ で $\mathcal{G}_\ell$ $\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}$ は可分なヒルベルトリー群 (多様体) であり、$\mathcal{G}\subset\mathcal{G}_\ell, \hat{\mathcal{A}}\subset\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}$ は稠密である。

# 曲率



$D \in \mathcal{A}_{\ell-1}$ とする。

$$D \circ D : \Omega^0(\eta)_\ell \to \Omega^2(\eta)_{\ell-2}$$

$$(s_\alpha) \mapsto (ds_\alpha + A_\alpha s_\alpha) \mapsto (D_\alpha(ds_\alpha + A_\alpha s_\alpha)) = (dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha)s_\alpha$$

**曲率**

$$F_\alpha = dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \in \Omega^2(ad(\eta))_{\ell-2}$$

を**曲率**という。
$F(D) = (F_\alpha)$ として

$$F : \mathcal{A}_{\ell-1} \to \Omega^2(ad(\eta))_{\ell-2}$$

# ゲージ群作用について





## まとめ

$D^*F_D = 0$：ヤンミルズ方程式
$F_D = *F_D$：自己双対接続
$F_D = -*F_D$：反自己双対接続
$\mathcal{G}_\ell$ は $\mathcal{A}_{\ell-1}$ に作用する。

$$\mathcal{M} = \{D \in \mathcal{A}_{\ell-1} | F_D = *F_D\}/\mathcal{G}_\ell \subset \mathcal{A}_{\ell-1}/\mathcal{G}_\ell$$

自己双対接続のモジュライ空間という。

# 直線束の場合





## $G = U(1)$ の場合

$G = U(1)$ 上のヤンミルズ方程式のモジュライ空間 $\mathcal{YM}_{U(1)}$ は $b_1(M)$ 次元トーラス $T^{b_1(M)}$ と微分同相である。

## 証明

$\mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$

$\mathcal{A} = \{D_\alpha = d + a_\alpha | F_D$が調和形式$\}$

$= \{a_\alpha | da_\alpha = 0\} = Z^1(M, i\mathbb{R}),\ F_D = da_\alpha$

$dF = d^*F = 0$：調和形式

$\mathcal{G} = \Omega^0(M, U(1)) = C^\infty(M, U(1))$

$g \in \mathcal{G}\ \ (g = e^{iu}$ に対して $g^{-1}dg = idu)$

$g(D) = D + idu,\ \ (u_\alpha) : u_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R} | u_\alpha - u_\beta \in 2\pi\mathbb{Z}$

$$W = \{idu = (idu_\alpha) \in \Omega^1(M) | e^{iu_\alpha} : M \to U(1)\}$$

# 証明の続き





$$\mathcal{YM}_{U(1)} = Z^1(M, i\mathbb{R})/W$$

$$\varphi : H^1(M, i\mathbb{R}) = Z^1(M, i\mathbb{R})/B^1(M, i\mathbb{R}) \to Z^1(M, i\mathbb{R})/W$$

$$Ker(\varphi) = H^1(M, 2\pi i\mathbb{Z})$$

を示す。
$\forall \gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$ とする。
$\forall idu \in Ker\varphi$ に対して $u = (u_\alpha) : U_\alpha \to \mathbb{R}$

$$\int_\gamma du = [u\gamma(t)]_0^1 \in 2\pi\mathbb{Z}$$

よって、$idu \in H^1(M, 2\pi i\mathbb{Z})$ つまり、準同型定理から
$Z^1(M, i\mathbb{R})/W \cong H^1(M, i\mathbb{R})/H^1(M, 2\pi i\mathbb{Z}) = T^{b_1(M)}$ □

# $\mathcal{G}_\ell, \mathcal{A}_{\ell-1}$ の接空間



$\mathfrak{g}$:$G$ のリー環
$\mathcal{G}_\ell = H_\ell(Aut(\mathfrak{g})) = H_\ell(P \times_{Ad} G)$ のリー環 $T_{id}\mathcal{G}_\ell$ は、

$$\exp : [u, X(u)]_{ad} \mapsto [u, exp(X(u))]_{Ad}$$

$ad(X)(Y) = [X, Y] \rightsquigarrow hgh^{-1}$

$$H_\ell(ad(\eta)) = H_\ell(P \times_{ad} \mathfrak{g})$$

である。

**ゲージ変換群の接空間**

$$T_{id}\mathcal{G}_\ell = \Omega^0(ad(\eta))_\ell$$

$\mathcal{A}_{\ell-1}=\{d+A_\alpha|A_\alpha\in\Omega^1(U_\alpha,ad(\eta|_{U_\alpha}))\}$ : $\eta$ 上の接続 $\Omega^1(ad(\eta))$ の作用するアフィン空間。

## 接続の空間の接空間

$$T_D\mathcal{A}=\Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1}$$

$D\in\mathcal{A}$ に対して、

$$\mathcal{G}\to\mathcal{A}$$

$g\mapsto g^*(D)$ の微分は、

$$\Omega^0(ad(\eta))\xrightarrow{D}\Omega^1(ad(\eta))$$

$(\because)g=e^X$ とし、$g^*(D)-D=e^{-X}\circ D\circ e^X-D$
$=e^{-X}D(e^X)+e^{-X}e^XD-D=e^{-X}e^XDX=DX$

# §3.2 可約接続





**定義 1**

$\eta$ 上の $SU(2)$-接続 $D$ が可約であるとは、直和分解 $\eta = \lambda_1 \oplus \lambda_2$ をもち、$D$ も分解に沿って $D = d_1 \oplus d_2$ と分割されることをいう。ここで、$d_i$ は $\lambda_i$ の接続。
$D$ が可約でないとき、既約という。

$G = SU(2)$

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) | tr(A) = 0, A + A^* = 0\}$$

ゲージ変換群 $\mathcal{G}_{\ell,D} \subset \mathcal{G}_\ell$ の $D$ を固定する部分群。
$\eta = P \times_{SU(2)} \mathbb{C}^2$ : 主 $SU(2)$ 束 $P$ に同伴する $\mathbb{C}^2$ 束

$$ad(\eta) = P \times_{ad} \mathfrak{su}(2)$$

$\mathcal{G}_{\ell,D} \subset \mathcal{G}_\ell$ 固定化部分群 $(g^*D = D)$

$\mathbb{Z}_2 \subset \mathcal{G}_{\ell,D}$ (中心) $\mathbb{Z}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

**定理 3.1**

$F_D \neq 0$ となる接続 $D$ に対して次は同値である。

1. $\mathcal{G}_{\ell,D}/\mathbb{Z}_2 \cong U(1)$
2. $D : \Omega^0(ad(\eta))_\ell \to \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1}$ は非自明な $Ker$ を持つ。
3. $D$ が可約である。
4. $\mathcal{G}_{\ell,D}/\mathbb{Z}_2 \neq 1$

(1) $\mathcal{G}_{\ell,D}/\mathbb{Z}_2 \cong U(1)$
(2) $D:\Omega^0(ad(\eta))_\ell \to \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1}$ は非自明な Ker を持つ。

## 証明

$(1) \Rightarrow (2)$
$1 \neq s \in \mathcal{G}_{\ell,D}$ に対する Lie 環の元を $u \in \Omega^0(ad(\eta))_\ell$ とする。
$s_t = exp(ut) \in \mathcal{G}_{\ell,D}$ をとする。$\forall \sigma \in \Gamma(\eta)$ に対して

$$\begin{aligned} 0 = (s_t^*(D))\cdot\sigma - D\cdot\sigma &= s_t^{-1}\circ D\circ s_t\sigma - D\sigma \\ &= s_t^{-1}(s_tD(ut)\cdot\sigma + s_tD\sigma) - D\sigma \\ &= tD(u)\cdot\sigma \end{aligned}$$

$t=0$ での微分を取ることで、$D(u)=0$ となる。

# 証明の続き





(2) $D : \Omega^0(ad(\eta))_\ell \to \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1}$ は非自明な Ker を持つ。
(3) $D$ が可約である。

---

(2)⇒(3)
$Du = 0$ となる $u \in \Omega^0(ad(\eta))_\ell$ を取る。
$u$ は $\mathfrak{su}(2)$-束の切断。
$u$ の固有値は $\pm\sqrt{-1}\lambda$。$(\lambda > 0)$
$e_1$ を $\sqrt{-1}\lambda$ に属する局所固有ベクトル $(e_1, e_1) = 1$
$Re(De_1, e_1) = 0$
$D(ue_1) = (Du)e_1 + uDe_1 = uDe_1$ (ライプニッツ則)
$D(ue) = D(\sqrt{-1}\lambda e_1) = \sqrt{-1}(d\lambda)e_1 + \sqrt{-1}\lambda De_1$
$d\lambda = Im(uDe_1, e_1) = Im(De_1, u^* e_1) = -Im(De_1, ue_1) =$
$-Im(De_1, \sqrt{-1}\lambda e_1) = \lambda Re(De_1, e_1) = 0$
よって $\lambda$ は局所定数。
$De_1$ は $e_1$ に平行。

# 証明の続き





よって、$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ $d_i$ は $e_i$ に作用する接続。

---

(3) $D$ が可約である。
(4) $\mathcal{G}_{\ell,D}/\mathbb{Z}_2 \neq 1$

---

(3)⇒(4)
$D = d_1 \oplus d_2$ とする。
$\theta \in \mathbb{R}$ として、$s = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\theta} \end{pmatrix}$ とおく。
$s \in \mathcal{G}_{\ell,D}$ である。
$(\because e^{-\sqrt{-1}\lambda} \circ d_i \circ e^{\sqrt{-1}} = d_i$ より$)$

---

(4) $\mathcal{G}_{\ell,D}/\mathbb{Z}_2 \neq 1$
(1) $\mathcal{G}_{\ell,D}/\mathbb{Z}_2 \cong U(1)$

---

# 証明の続き





(4)$\Rightarrow$ (1) $s\in\mathcal{G}_{\ell,D}$ が $s\neq\pm1$ とすると、$s=exp(u)$ となる $u\in\Omega^0(ad(\eta))$ となり、$Du=0$ を満たす。$D=d_1+d_2$ となる。ホロノミー群

$$\Phi_u(D)=\{a\in G|au=P_\ell(u),\ell\in\Omega(M,p)\}$$

ここで $P_\ell$ はループ $\ell$ に沿った $D$ による平行移動。

$$\mathcal{G}_D=C_G(\Phi_u(D))=\{g\in G|gs=sg,\forall s\in\Phi_u(D)\}$$

# 証明の続き





$\mathcal{G}_D \subset U(1)$ なら $\Phi_u(D) = U(1)$
しかし、$\mathcal{G}_D$ に非可換元 $s$ が含まれるのなら、

$$\Phi_u(D) \subsetneq U(1)$$

$\Phi_u(D) \subsetneq U(1)$ なら $D$ は flat。
仮定に反する。よって $\mathcal{G}_{\ell,D}/\mathbb{Z}_2 = U(1)$ □
$\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}$ : 既約な接続全体

**系 2**

$\mathcal{G}_\ell/\mathbb{Z}_2$ は $\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}$ に自由に作用する。

# 多様体に向けて



群 $\mathcal{G}$ が多様体 $\mathcal{M}$ に作用する。
$p: \mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{G}$ を自然な射影。

**疑問 3**

$\mathcal{M}/\mathcal{G}$ がハウスドルフ多様体となるか？

1. $\underline{\mathcal{M}/\mathcal{G} \text{ がハウスドルフ}}\Leftrightarrow$
$\Gamma = \{(x, g\cdot x) \in \mathcal{M}^2 | g \in \mathcal{G}\}$ が閉集合である。($\Gamma$ をグラフという)
2. $\underline{\mathcal{M}/\mathcal{G} \text{ は多様体}}\Leftarrow$
$\forall x \in \mathcal{M}$ に対して、ある部分多様体 $x \in \mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ が存在する。$\mathcal{N}$ は開多様体。$\forall y \in \mathcal{N}$
$$T_y\mathcal{M} = T_y\mathcal{G}\cdot y \oplus T_y\mathcal{N}$$
が成り立ち、$p|_{\mathcal{N}}: \mathcal{N} \to p(\mathcal{N})$ が全単射である。($\mathcal{N}$ をスライスという)

## ハウスドルフ性

$\hat{\mathcal{A}}/\mathcal{G}$ はハウスドルフである。

## 証明

$\Gamma = \{(D, s^*(D)) \in \hat{\mathcal{A}}^2_{\ell-1} | s \in \tilde{\mathcal{G}}\}$ が閉集合であることを示せば良い。
$(D + A_n, s_n^*(D + A_n))$ : $\hat{\mathcal{A}}^2$ での収束点列。

$$
\begin{aligned}
s_n^*(D + A_n) &= s_n^{-1} \circ (D + A_n) \circ s_n \\
&= s_n^{-1}(Ds_n) + s_n^{-1} s_n D_n + s_n^{-1} A_n s_n \\
&= D + s_n^{-1}(Ds_n) + s_n^{-1} A_n s_n \\
&= D + A_n'
\end{aligned}
$$

# 証明の続き



$A_n \to A \in \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1}$
$A'_n \to A' \in \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1}$

$$Ds_n = s_n A'_n - A_n s_n$$

$s_n$ は $H_\ell(ad(\eta))$ において有界
$s_n$ には収束する部分列が存在する (それを再び $s_n$ と書く)。
$s_n \in H_{\ell-1}(End(\eta))$ で収束する (レリッヒの定理)
$Ds_n \in H_{\ell-1}(End(\eta))$
$s_n \in H_\ell(End(\eta))$
ここで、

$$\mathcal{G}_\ell \subset H_\ell(End(\eta))$$

は閉集合。
$s_n$ は $s \in \mathcal{G}_\ell$ に収束する。

$$s^*(D+A) = D+A'$$

# 既約接続のモジュライ空間





$\mathcal{G}$：ゲージ群

$$\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{A}}/\mathcal{G}$$

$D \in \hat{\mathcal{A}}$ 起点。
$D + A$：任意の接続。$(A \in \Omega^1(ad(\eta)))$
スライスは $\{Du | u \in \Omega^0(ad\eta)\}$ と直交補空間をとる。

$$(A, Du) = 0 \Leftrightarrow (D^* A, u) = 0$$

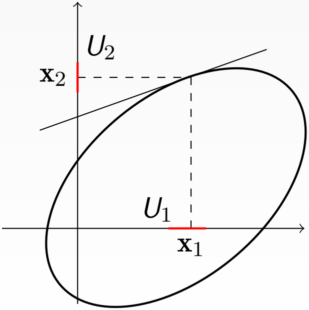
$$\mathcal{X}_D := \{A \in \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1} | D^* A = 0\}$$

がスライスになることを示す。

# 陰関数定理

## 有限次元空間上の陰関数定理

$f:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^k$ : $C^\infty$ 級写像。
$(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k$ において $|\partial_2 f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)|\neq 0$ なら
$\Rightarrow \exists U_i$ : $\mathbf{x}_i$ の近傍、$\exists h: U_1\to U_2$ : $C^\infty$ 級写像 s.t.
$\forall x\in U_1$ に対して $f(x,h(x))=0$ を満たす。




$n=k=1$

# バナッハ空間の場合

$E_1, E_2, F$ バナッハ空間

## バナッハ空間上の陰関数定理

$f: E = E_1 \times E_2 \to F$ ($C^\infty$ 級写像)
$(\xi_1, \xi_2) \in E$ に対して $\delta_2 f: E_2 \to F$ が可逆
$\Rightarrow \exists U_i$ : $\xi_i$ の近傍、$\exists h: U_1 \to U_2$ : $C^\infty$ 級写像 s.t.
$\forall \eta \in U_1$ に対して $f(\eta, h(\eta)) = 0$ を満たす。

$$U_1 \to S = \{(\eta_1, \eta_2) \in E | \eta_1 \in U_1, f(\eta_1, \eta_2) = 0\}$$

は同相写像

# スライス定理

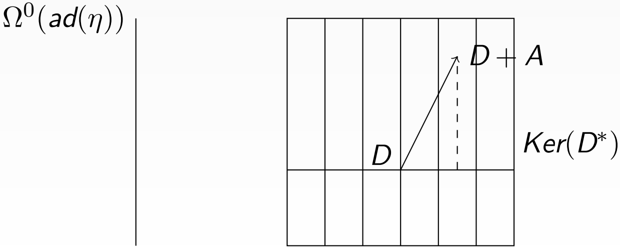
## 定理 3.2

$\forall D \in \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}$ に対して $D$ の近傍の $\mathcal{O}_D \subset \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}$ が存在して、

$$\Phi_D : \mathcal{O}_D \cong Ker(D^*) \times \tilde{\mathcal{G}}_\ell$$

さらに $\tilde{\mathcal{G}}_\ell$ の作用に関して同変である。

バナッハ多様体の間の陰関数定理を応用する。



# 証明

$\widehat{\mathcal{A}}_{\ell-1} = D + \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1}$
より

$$L_D : \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1} \times \tilde{\mathcal{G}}_\ell \to \Omega^0(ad(\eta))$$

を

$$L_D(A, s) = D^*(s^{-1} \circ Ds + s^{-1}As)$$

$L_D$ の変分を考える。$(s = e^x)$

$$\begin{aligned} L_D(A, e^X) &= D^*(e^{-X}(De^X) + e^{-X}Ae^X) \\ &= D^*(e^{-X}e^X(DX) + A + (e^{-X}Ae^X - A)) \\ &= D^*(DX + A + (\text{高次の項})) \end{aligned}$$

ゆえに、
$\delta L_D(A, e^X) = D^*(DX + A)$

# 証明の続き





$$\delta_2 L_D(0, X) = D^*(DX)$$

が成り立つ。

$$D^*D : \Omega^0(ad(\eta)) \to \Omega^0(ad(\eta))$$

は可逆 (self-adjoint かつ単射 ($D$ の既約性))
ゆえに、陰関数定理から、
$\exists \mathcal{O}_D \subset \Omega^1(ad(\eta))$ (開集合)

$$\exists s : \mathcal{O}_D \to \tilde{\mathcal{G}}_\ell$$

が存在して、

$$\Phi : \mathcal{O}_D \to KerD^* \times \tilde{\mathcal{G}}$$

$$A \mapsto (s(A)^*(D + A) - D, s(A))$$

# 証明の続き





(逆写像)
$s^{-1} \circ Ds + s^{-1}As = A'$ とおくと、
$D + A = s \circ (D + A') \circ s^{-1}$ であることから

$$\begin{aligned} (A', s) &\mapsto s \circ (Ds^{-1}) + sAs^{-1} \\ &= s \circ (-s^{-1}(Ds)s^{-1}) + sAs^{-1} = -(Ds)s^{-1} + sAs^{-1} \end{aligned}$$

$$\Phi^{-1} : (A', s) \mapsto -(Ds)s^{-1} + sA's^{-1}$$

とすればよい。
(同変性)
$L_D(g^{-1}(Dg) + g^{-1}Ag, g^{-1}e^X)$
$= D^*((g^{-1}e^X)^{-1}(D(g^{-1}e^X)) + (g^{-1}e^X)^{-1}(g^{-1}(Dg) +$
$g^{-1}Ag)(g^{-1}e^X))$
$= D^*(e^{-X}(De^X) + e^{-X}Ae^X) = L_D(A, e^X)$

$$\mathcal{O}_D \cong KerD^* \times \tilde{G}_\ell$$

# 証明の続き



$$T_{D,\epsilon} = \{A \in \Omega^1(ad(\eta)) | ||A||_{\ell-1} < \epsilon, D^*A = 0\}$$

とする。

**系 4**

$[D] \in \hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{G}}$ に対して、ある $[D]$ の開近傍 $\mathcal{U}_D$ が存在して、$\mathcal{U}_D$ は、$T_{D,\epsilon}$ と微分同相である。

## 後半の目標

モジュライ空間 $\hat{\mathcal{M}}$ が多様体であること。

## 問題

$\mathcal{C}$ を計量の空間。
$\hat{\mathcal{M}}$ は計量に依存して決まる。($*$ は計量に依存する)
$\hat{\mathcal{M}}_g$ は特殊な $g$ によっては possibly not 多様体。

$$\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1} \times \mathcal{C} \supset \{(D,g) \in \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1} \times \mathcal{C} | F_D = *_g F_D\} =: \widehat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}$$

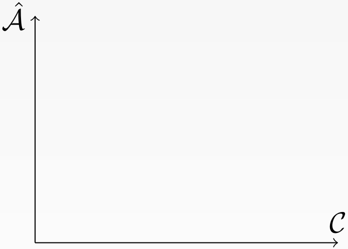
- $\widehat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}$ が多様体であり

$$\pi : \widehat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}/\tilde{\mathcal{G}}_\ell = \cup_{g\in\mathcal{C}} \hat{\mathcal{M}}_g \to \mathcal{C}$$

- $\pi$ の正則値が存在すれば $\pi^{-1}(g) = \hat{\mathcal{M}}_g$ が多様体。

# $\widehat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}$ が多様体であること

$$\mathcal{P}^{-1}(0) = \widehat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}$$




$g_0$ を $M$ 上の固定したリーマン計量
$g \in \mathcal{C}$ は、$g = \varphi^*(g_0)$ と書ける。

$$\varphi^*(g)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{w}))$$

## 計量の空間

$\mathcal{C} = C^k(GL(TM))$ である。
$\mathcal{C} \ni g \leftrightarrow \varphi \in C^k(GL(TM))$

$$P_- : \Omega^2 \to \Omega^2_-$$

$$\theta \mapsto \frac{1}{2}(\theta - *\theta)$$

$P_-(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta$ が self dual である

$$\mathcal{P}:\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}\times\mathcal{C}\to\Omega^2_-(ad(\eta))=\Gamma(\wedge^2_- T^*M\otimes ad(\eta))$$

を

$$(D,\varphi)\mapsto P_-((\varphi^{-1})^*F_D)$$

と定義する。

$P_-((\varphi^{-1})^*F_D)=0$

$\Leftrightarrow \varphi^*(g)$ において、$F_D$ が self dual である

$$\widehat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}:=\mathcal{P}^{-1}(0)\subset\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}\times\mathcal{C}$$

書き、**パラメータ付きモジュライ空間**という。

**定理 3.4**

$\mathcal{P}$ は $0$ で正則値を取る。

$\mathcal{P}^{-1}(0)$ は滑らかな多様体になる。

# 計量の無限小変換





計量の変換は、$\mathcal{C} = C^k(GL(TM))$。$\varphi \in C^k(GL(TM))$ に対して、

$$g : TM \times TM \to \mathbb{R}$$

を

$$g \mapsto g(\varphi(\cdot), \varphi(\cdot)) =: \varphi^* g$$

とする。
$V = T_pM$ とおく。
無限小変換は $T_\varphi \mathcal{C} = \Gamma(\mathfrak{gl}(TM)) = \Gamma(End(TM)) = \Gamma($

直交変換は $\mathcal{C}$ を変えない。
対称変換の方向が $g$ を変える向き。

# 定理3.4の証明のための準備





$e_1, \cdots, e_n$ : $V$の正規直交ベクトル。
$End(V)$ の生成元は
$r_i^i = e_i \otimes e^i$
$r_i^j = e_i \otimes e^j + e_j \otimes e^i$
転置
$r \rightsquigarrow r^* \in End(V^*)$
$r^* \in End(V^*)$ に対して、
$r^*(v \wedge w) = r^*(v) \wedge w - v \wedge r^*(w)$
として計算することで、
$r^* : \wedge^2 V^* \to \wedge^2 V^*$
を得る。

## $i, j, k, \ell$ は互いに異なる

$$(r_i^j)^*(e^i \wedge e^j) = e^i \wedge e^j$$
$$(r_i^j)^*(e^j \wedge e^k) = 0$$
$$(r_k^j)^*(e^k \wedge e^j) = e^i \wedge e^j$$
$$(r_k^j)^*(e^i \wedge e^k) = 0$$
$$(r_k^j)^*(e^\ell \wedge e^j) = 0$$

$*$：ホッジ作用素

$P_\pm : \Omega^2(ad(\eta)) \to \Omega^2_\pm(ad(\eta))$：射影

$$\theta \mapsto \frac{1}{2}(\theta \pm *\theta)$$

$$\sigma^{ij} = P_-(e^i \wedge e^j), \quad \alpha^{ij} = P_+(e^i \wedge e^j)$$

$$(r_i^j)^*(\sigma^{ij}) = \sigma^{ij} + \alpha^{ij}, \quad (r_k^j)^*(\sigma^{ij}) = \alpha^{kj}$$

# いくつかの補題

## 補題 3.7

$W$ : 内積を持つベクトル空間
$F \in \wedge^2_+ V^* \otimes W$, $\Phi \in \wedge^2_- V^* \otimes W$
もし、任意の $r \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して、$(r^* F, \Phi)_W = 0$ なら、
$\wedge^2_+ V^* \otimes \wedge^2_- V^* \ni (F, \Phi)_W = 0$ である。

## 証明

$F = \sum_{i=2}^4 \sigma^{1i} \otimes F_i \in \wedge^2_+ V^* \otimes W$
$\Phi = \sum_{i=2}^4 \alpha^{1i} \otimes \Phi_i \in \wedge^2_- V^* \otimes W$
$\forall r \in End(V)$ に対して、
$(r^*(F), \Phi) = 0$ と仮定する。
$r = r_3^1 + r_4^2$ とすると、$(r^* F, \Phi) = (F_2, \Phi_4)$
$r = r_4^1 + r_3^2$ とすると、$(r^* F, \Phi) = (F_3, \Phi_2)$
$r$ を変えて続ける $\cdots \to (F_i, \Phi_j) = 0$ $\square$

## $\mathfrak{su}(2)$ の基底

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

### 補題 3.12

非ゼロ $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ に対して、内積が $(X, Y) = 0$ であるなら $[X, Y] \neq 0$ である。

### 証明

$X = \sum_{i=1}^{3} X^i \sigma_i, Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \sigma_i$ を非ゼロベクトルとする。
$(X, Y) = -tr(XY) =$
$-tr \begin{pmatrix} X_1 i & X_2 + iX_3 \\ -X_2 + iX_3 & -iX_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 i & Y_2 + iY_3 \\ -X_2 + iY_3 & -iY_1 \end{pmatrix}$
$= 2(X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3)$

# 証明の続き





$X \times Y = (X_2Y_3 - X_3Y_2, X_3Y_1 - X_1Y_3, X_1Y_2 - X_2Y_1) = (b_1, b_2, b_3)$ とおく。

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} -(X, Y) + ib_1 & b_2 + ib_3 \\ -b_2 + ib_3 & -(X, Y) - ib_1 \end{pmatrix}$$

$(X, Y) = 0$ かつ $[X, Y] = \mathbf{0}$ ならば、
$b_1 = b_2 = b_3 = 0$ であり、$X \times Y = \mathbf{0}$ であり、
$X \parallel Y$ よって、$X = Y = 0$ これは $X, Y$ が非ゼロに反する。
よって、$(X, Y) = 0$ なら $[X, Y] \neq \mathbf{0}$ である。

# 定理3.4の証明





**定理3.4**

$\mathcal{P}$ は 0 で正則値を取る。

$\mathcal{C} = C^k(GL(TM))$ のリー環 $\mathfrak{c}$ は $C^k(End(TM)) = C^k(M(n,\mathbb{R}))$

$$\mathcal{P} : \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1} \times \mathcal{C} \to \Omega^2_-(ad(\eta))_{\ell-2}$$

$$(D', \varphi') \mapsto F_{D', -_{\varphi'^* g}}$$

の変分 $\delta\mathcal{P}$ が全射であることを示す。

$$\delta\mathcal{P} : \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1} \oplus \mathfrak{c} \to \Omega^2_-(ad(\eta))_{\ell-2}$$

$$\delta\mathcal{P} = \delta_1\mathcal{P} \oplus \delta_2\mathcal{P}$$

$$\delta_1\mathcal{P}_{(D,\varphi)}(A) = P_-((\varphi^{-1})^* DA)$$

$$\delta_2\mathcal{P}_{(D,\varphi)}(r) = P_-((\varphi^{-1})^*(r^* F_D))$$

# 証明の続き





ここで、計量 $\varphi^* g$ での次の完全系列を考える
($\delta_1 \mathcal{P} = P_- \circ D$)

$$0 \to \Omega^0(ad(\eta))_\ell \xrightarrow{D} \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1} \xrightarrow{\delta_1 \mathcal{P}} \Omega^+_-(ad(\eta))_{\ell-2} \to 0$$

# 証明の続き

から、$\Phi \in Cok(\delta\mathcal{P})$ とし、$\Phi \neq 0$ とする。

$$0 = \int_M (P_-(\varphi^{-1})^* DA, \Phi)_g = \int_M (DA, \varphi^*\Phi)_{\varphi^* g}$$

$$= \int_M (A, D^*(\varphi^*\Phi))_{\varphi^* g}$$

よって、$D^*(\varphi^*\tilde{\Phi}) = 0$ (where $\tilde{\Phi} = \varphi^*\Phi$)

$$0 = \int_M (P_-((\varphi^{-1})^*(r^* F_D)), \Phi)_g$$

$$= \int_M (r^* F_D, \tilde{\Phi})_{\varphi^* g}$$

よって、

# 証明の続き





補題3.7より $Im(F_D)$ と $Im(\tilde{\Phi})$ は直交する。
$\dim \mathfrak{su}(2)=3$ より、
$F_D, \tilde{\Phi} \in \Omega^2(ad\eta)$ であり、
$F_D, \Phi \neq 0$ の点において、$F_D, \tilde{\Phi}$ のどちらかは $rank = 1$
$F_D$ は self-dual,$\tilde{\Phi}$ は anti-self-dual より、

$$DF_D = D^*F_D = 0, D\tilde{\Phi} = D^*\tilde{\Phi} = 0$$

より、$F_D, \Phi$ は $DD^* + D^*D = 0$ の解。
($\Phi$ が $\mathfrak{su}(2)$ の中で 1 次元の場合。)
ある開集合 $U$ で、$\forall x \in U$
$\Phi_x = \alpha_x \otimes u_x \quad$ (where $\alpha(x) \in \Omega^2_-$, $u(x) \in \Omega^0(ad(\eta))$)
$(u, u) = 1$ としておく。

# 証明の続き

$0 = D\tilde{\Phi} = d\alpha \wedge u + \alpha \wedge Du$
$0 = d(u,u) = (Du,u) + (u,Du) = 2(Du,u)$ より、
上の式に、$u$ を内積をとる。
$0 = (d\alpha \wedge u, u) + (\alpha \wedge Du, u) = d\alpha + \alpha \wedge (Du, u)$
より、$d\alpha = 0$
よって、
$\alpha \wedge Du = 0 \Rightarrow Du = 0$
$Im(F_D) \perp Im(\tilde{\Phi})$ であるから、
$(F_D, u) = 0$
$D^2 u = F_D u = [F_D, u] \neq 0$ (補題3.12)
これは、$Du = 0$ に矛盾。
($F_D$ が $\mathfrak{su}(2)$ の中で 1 次元の場合。)
$F_D = \sigma \otimes u$ かつ、$\sigma \in \Omega^2_+(ad(\eta)), |u| = 1$ とする。
$DF_D = 0$ より、$Du = 0$ よって、$F = 0$ 以外の部分が連結であれば、$F \neq 0$ の点から、$u$ の定義域を $F = 0$ にまで拡張することができる。

## 証明の続き





$F$ は楕円型方程式 $((D^*D + DD^*)F = 0)$ の解の一般論より、$F = 0$ の部分は余次元が 1 より大きい。よって、$F \neq 0$ となる場所は連結。
よって、$Du = 0$ となる切断が存在する。
これは、$D$ が既約であることに矛盾。
つまり、この場合はありえない。つまり、$\tilde{\Phi} = 0$ となり、$\mathcal{P}$ は全射。 $\square$

## 定理 3.13

$\widehat{\mathcal{SM}}_{\ell-1}/\tilde{\mathcal{G}}_{\ell-1}$ はバナッハ多様体である。

## 証明

$\forall p \in \widehat{\mathcal{SM}}_{\ell-1}$ に対してスライスが存在することを証明する。$p = (D, \varphi)$ とする。制限

$$\overline{\mathcal{P}} : \{D + A \in \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1} | D^* A = 0\} \times \mathcal{C} \to \Omega^2_-(ad(\eta))_{\ell-2}$$

$$(D', \varphi') \mapsto F_{D',+_{\varphi'^* g}}$$

が 0 で正則値であることを示す。

# 証明の続き





$$0 \to \Omega^0(ad(\eta)) \xrightarrow{D} \Omega^1(ad(\eta)) \xrightarrow{\delta_1 \mathcal{P}} \Omega^2_-(ad(\eta)) \to 0$$

が完全。$(\delta_1 \mathcal{P} = P_- \circ D)$

$$ImD \perp KerD^*$$

$$ImD \subset Ker(\delta_1 \mathcal{P})$$

ゆえに、

$$\delta_1 \mathcal{P}_{(D,\varphi)} = \delta_1 \mathcal{P}_{(D,\varphi)}|_{KerD^*} = \delta_1 \overline{\mathcal{P}}_{(D,\varphi)}$$

c には制限をかけないので、

$$\delta_2 \mathcal{P}_{(D,\varphi)} = \delta_2 \overline{\mathcal{P}}_{(D,\varphi)}$$

$$\delta \mathcal{P}_{(D,\varphi)} = \delta_1 \mathcal{P}_{(D,\varphi)} \oplus \delta_2 \mathcal{P}_{(D,\varphi)} = \delta \overline{\mathcal{P}}_{(D,\varphi)}$$

より、$\delta \mathcal{P}$ は全射より、$\delta \overline{\mathcal{P}}_{(D,\varphi)}$ も全射。

$(D,\varphi)$ において、作用のスライスの近傍と $[D,\varphi]\in\widehat{\mathcal{SM}}/\tilde{\mathcal{G}}_\ell$ の近傍が同相。
$\widehat{\mathcal{SM}}_{\ell-1}/\tilde{\mathcal{G}}_{\ell-1}$ は多様体。 $\square$

# §3.6 既約接続のモジュライ空間 $\hat{\mathcal{M}}$ は多様体である





$$\pi : \widehat{\mathcal{S}\mathcal{M}}_{\ell-1}/\tilde{\mathcal{G}}_\ell = \cup_{\varphi\in\mathcal{C}}\hat{\mathcal{M}}_{\ell-1,\varphi^* g} \to \mathcal{C}$$

$$\hat{\mathcal{M}}_{\ell-1,\varphi^* g} = \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1,\varphi^* g}/\tilde{\mathcal{G}}_\ell$$

**サードスメールの定理**

$\pi : M \to N$ をパラコンパクトなバナッハ多様体の間のフレドホルム写像とする。この時、$\pi$ の正則値の集合は、ベール集合である。

## 定理 3.14

$\mathcal{C}$ のベール集合が存在して、$\varphi \in \mathcal{C}$ に対して、$\pi^{-1}(\varphi) = \hat{\mathcal{X}}_\varphi$ は $5$ 次元多様体である。

## 証明

$$\pi : \widehat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}/\tilde{\mathcal{G}}_\ell \to \mathcal{C}$$

がフレドホルム写像であることを示せばよい。
($\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\delta\pi$ が $\dim(Ker) < \infty$ かつ $\dim(coKer) < \infty$)
$\delta_1\mathcal{P} = P_- \circ D$ であり、楕円型複体

$$E : \quad 0 \to \Omega^0(ad(\eta)) \xrightarrow{D} \Omega^1(ad(\eta)) \xrightarrow{\delta_1\mathcal{P}} \Omega^2_-(ad(\eta))) \to 0$$

のコホモロジー

$$H^0_D(d\eta), H^1_D(ad(\eta)), H^2_D(ad(\eta))$$

# 証明の続き



$$p = (D, id) \in \widehat{\mathcal{SD}}_{\ell-1},\ T_{\varphi}\mathcal{C} = \mathfrak{c}$$

$$\delta\pi : T_{[p]}\left(\widehat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}/\tilde{\mathcal{G}}_{\ell}\right) \to \mathfrak{c}$$

$$T_p\widehat{\mathcal{SD}}_{\ell-1} = \{(A, r) \in \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1} \oplus \mathfrak{c} | \delta_1\mathcal{P}(A) + \delta_2\mathcal{P}(r) = 0\}$$

$$T_{[p]}\left(\widehat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}/\tilde{\mathcal{G}}_{\ell}\right)$$

$$= \{(A, r) \in \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1} \oplus \mathfrak{c} | \delta_1\mathcal{P}(A) + \delta_2\mathcal{P}(r) = D^*A = 0\}$$

($\dim(Cok(\delta\pi)) < \infty$ について)

$r \in Im(\delta\pi) \Leftrightarrow \delta_2\mathcal{P}(r) = -\delta_1\mathcal{P}(A) \in \delta_1\mathcal{P}(KerD^*)$

$\Leftrightarrow r \in \delta_2\mathcal{P}^{-1}(\delta_1\mathcal{P}(KerD^*))$

$$\delta_2\mathcal{P}^{-1}(\delta_1\mathcal{P}(KerD^*))$$

$$= \delta_2\mathcal{P}^{-1}(\delta_1\mathcal{P}(KerD^* \oplus ImD)) = \delta_2\mathcal{P}^{-1}(Im(\delta_1\mathcal{P}))$$

# 証明の続き





$$\dim(Cok(\delta_1\mathcal{P})) < \infty$$

$$\dim(Cok(\delta\overline{\pi})) = \dim((\delta_2\mathcal{P}^{-1})^{\perp}) \leq \dim(Cok(\delta_1\mathcal{P})) < \infty$$

($\dim(Ker(\delta\overline{\pi})) < \infty$ について)

$$Ker(\delta\overline{\pi}) = \{(A, r) \in \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1} \oplus \mathfrak{c} | \delta_1\mathcal{P}(A) = D^*A = r = 0\}$$

$$= \{A \in \Omega^1(ad(\eta))_{\ell-1} | \delta_1\mathcal{P}(A) = D^*A = 0\} = H^1_A(ad(\eta))$$

$$\dim(H^0_D(ad(\eta))) = h^0 = 0 \quad (D\text{は既約})$$

$$\dim(Ker(\delta\overline{\pi})) = h^1$$

$$\dim(Cok(\delta\overline{\pi})) = h^2$$

$$\mathrm{ind}(\delta\overline{\pi}) = h^1 - h^2 = -\mathrm{ind}(E) = 5$$

(Atiyah-Patdi-Singer's index theorem) $\square$

# 計量の等角類

$Conf(M)$：$M$ 上の計量の等角類とする。
$[g_0]\in Conf(M)$ とする。
$\Lambda_0^{\pm}=\{\omega|*_{g_0}\omega=\pm\omega\}$

## 補題 3.15

$Conf(M)$ は、

$$\{f\in Hom(\Lambda^-,\Lambda^+)||\mu|<1\}$$

と同一視される。ここで、$|\mu|$ は作用素ノルム。

$$Conf(M)\mapsto\{\mu\in Hom(\Lambda^-,\Lambda^+)||\mu|<1\}$$

を、

$$g\mapsto\mu$$

$$\Lambda_g^-:=\{\omega+\mu(\omega)|\omega\in\Lambda^-\}\subset\Lambda^2$$

ここで、$\Lambda_g^-=\{\omega|*_g\omega=-\omega\}$

この時、$[g] \in Conf(M)$ に対して、
$\mu_g : \Lambda^- \to \Lambda^+$ を $\Lambda^-$ の $\mu_g$ のグラフ $\{\omega + \mu_g(\omega) | \omega \in \Lambda^-\}$ が $\Lambda_g^-$ となる様に決める。

$$Conf(M) \cong \{\mu : \Lambda^-(M) \to \Lambda^+(M) || \mu_x| < 1 \forall x \in M\}$$

$$[g] \mapsto \mu_g$$