

INSTANTON FLOER 理論勉強レシピ

理化学研究所, 谷口 正樹

まず初めに, この集会 (微分トポロジー 2021) の企画者の皆様, どうもありがとうございました. また, 発表者の皆様も, お疲れ様でした. そして, 本日最後まで残って聞いて頂いた方々も, お疲れ様でした.

このノートは, homology 3-sphere の $SU(2)$ - Instanton Floer homology の構成について, 文献をまとめたものである.

1. 主な参考文献

主な Instanton Floer 理論の参考文献¹は,

- 深谷先生の教科書, "ゲージ理論とトポロジー" [11] (和書で定番の教科書, Donaldson 不変量の定義もある),
- Donaldson の教科書, "Floer homology group in Yang-Mills gauge theory" [1] (洋書で定番の教科書),
- Mrowka のレクチャー Youtube " <https://youtu.be/MXXDht90wmE> " のシリーズ
- Kronheimer のレクチャーノート, "Math 283 - Instanton Floer Homology, Kronheimer"で検索すると手に入る.
- Mrowka のレクチャーノート
<https://drive.google.com/file/d/1UDWj5fR5mfUZUJF6yx0xycLRQVwzk2B-/view>
- Salamon-Werheim, Instanton Floer homology with Lagrangian boundary conditions, [8] (境界付きの場合を含むが, 丁寧に書かれている箇所が多い, 摂動の扱いがしっかり書かれている)
- Saveliev, invariants of homology 3-spheres, [9] (解析的な議論は載っていないが, Casson 不変量, $SU(2)$ 表現に詳しい)
- Floer, An instanton-invariant for 3-manifolds, [3] (原論文)

である.² このノートは, 閉 4 次元多様体の Yang-Mills ゲージ理論を勉強した人向け (微分トポロジー 2021 に参加された方向け) に, シリンダー状の端がついた多様体上の YM ゲージ理論 (instanton Floer 理論) の文献をまとめるものである. また, 途中に出てくる解析の用語に関する参考文献集を Appendix に載せた.

2. INSTANTON FLOER HOMOLOGY 構成の概要

Y を oriented homology 3-sphere とする. Instanton Floer homology とは一言でいうと, Chern-Simons 汎関数

$$cs : \mathcal{B}(Y) := \{Y \text{ 上の既約 } SU(2) \text{ 接続全体}\} / \text{ゲージ変換} \rightarrow S^1$$

に対する Morse homology である. また有限次元多様体の Morse homology の構成には, cellular homology を経由するものなど, いくつか知られているが, ここでは, 関数

Date: 2021/2/23.

¹2021 年 2 月現在の.

²私の目の届く範囲のものを列挙した.

解析的な構成を用いる. 関数解析的な Morse homology の構成は, 有限次元多様体の Morse 理論の場合も, 並行して行われる.³ 以下が,

(1) 関数解析的な有限次元 Morse homology の構成

の参考文献である.

- Morse homology, Schwartz, [10]
- A Functional Analytic Approach to Morse Homology, Udhav Fowdar
<https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/pub/Fowdar.pdf>

(1) では, Morse 関数の定義域が必ずしも有限次元多様体である必要がない. 構成は関数解析的ではあるが, 有限次元 Morse の場合は, homology を取ると singular homology と同型になる. しかし, 無限次元の状況では, 関数解析的な方法で得られたホモロジーは, 必ずしも, 無限次元多様体の singular homology とは同型にならない. Instanton Floer 理論の場合もそうである. このノートは, (1) に並行させる形で, Instanton Floer homology の構成の概説を試みるものである.

Instanton Floer 理論の構成は基本的に, この関数解析的な Morse homology の構成に沿って行われる. Morse homology の構成を実行するためには, 次の状況を確保する:

- (1) $B(Y)$ 上の Banach 多様体の構造があり, その構造について cs が滑らかであること ((1) の場合でいうと, $B(Y)$ が有限次元多様体 M の代わり, cs は, M 上の関数)⁴,
- (2) $B(Y)$ 上に Riemann 計量を入れ, cs の gradient vector field, Hessian を求めること,
- (3) $B(Y)$ の gradient flow の方程式の解が, $Y \times \mathbb{R}$ 上の ASD 方程式の解のモジュライに対応すること ((1) に対応物なし),
- (4) 相対的 Morse 指数を定義すること, 相対次数の和公式を示すこと ((1) でいうと, ある作用素の Fredholm 指数),
- (5) cs を摂動し, Morse-Smale にすること ((1) でいうと, ある作用素の全射性),
- (6) 臨界点集合がコンパクトであること, 0 次元多様体の構造を持つこと,
- (7) gradient flow の解の空間が多様体の構造を持つこと,
- (8) 微分が定義できていること (向きをちゃんと入れられること),
- (9) 計量, 摂動の取り方に依存しないことの証明.

これらが Instanton Floer homology を定義する際の全ての論理である. 以下, これらの項目をより詳しく説明する. それぞれ参考文献もつけた. 以下に述べてある参考文献は, 実際に私が議論を追う際に, 読みやすいと感じた文献が挙げてある. (ただし, その全てが挙げてあるわけではない) あくまで一つの道筋だと思って, 参考にしていただきたい.

- (1) Sobolev norm を使う, 4 次元の場合と同様,
- (2) [11, page 277-280] を参照, [1] の対応箇所も参照.
- (3) [11, page 281] を参照, [1] の対応箇所も参照.
- (4) $Y \times \mathbb{R}$ 上に定まる Atiyah-Hitchin-Singer (以下 AHS) complex の Fredholm 指数, もしくは, Hessian 作用素のスペクトルフローとして定式化される. Fredholm 性は, 閉の場合とは違って, 接続の境界条件に依存する問題となる. 閉の場合とは決定的に違う. 主なアイデアは, AHS operator を t -方向と Y の成分に, $dt+L$ というように分け, L に関して固有分解することで, dt +(行列作用素) のように扱い, t に関する常微分方程式の議論に帰着することで Fredholm 性

³人によっては一番早道なのは, この有限次元の場合を先に読んでしまうというものなのかもしれない.

⁴(1) が被ってしまっているが, itemize の (1) は使わない.

を得ることである。(1)の場合には、実際に $dt + (\text{行列作用素})$ が現れる [1, Section 3] にかなり短くまとまっている。和公式の証明も [1, Section 3] 参照。[11] の対応箇所も参照。

- (5) Morse 性は Hessian の invertibility を保証することである。これには、計量の摂動や、self-dual 2-form の摂動より、Chern-Simons 汎関数そのものを摂動する、holonomy perturbation が適している。holonomy を用いた perturbation を考える理由は、 $\mathcal{B}(Y)$ のコンパクト集合 C に対して、いくらでもループをたくさん取れば、 C の点はそのホロノミーの値で分類できる、という点にある。これにより、 $\mathcal{B}(Y)$ の任意のコンパクト部分多様体上の関数をホロノミー摂動を用いて近似できる。[1, Subsection 5.5] を参照。[8] の対応箇所も参照。ただし、境界付き 3 次元多様体で議論を行っている。[11] の対応箇所も参照。
- (6) 臨界点のコンパクト性は、以降に述べる chain convergent の議論の系と言えるため、ここでは省略。ある臨界点 a での virtual tangent space を表す chain complex は、

$$T_a \mathcal{B}(Y) = \ker d_a^* \xrightarrow{\text{Hess}_a(cs+\pi)=*d_a+D \text{grad } \pi_a} \ker d_a^* = T_a \mathcal{B}(Y)$$

である。ただし、

$$d_a^* : \Omega_Y^1(\mathfrak{su}(2)) \rightarrow \Omega_Y^0(\mathfrak{su}(2))$$

は、 d_a の formal adjoint である。 π は cs の摂動を表す。Hessian の非退化性は、このコホモロジーの $H^0 = H^1$ が消えていること意味する。これにより、臨界点には無限次元版の陰関数定理から 0 次元多様体の構造が入る。

次に (Morse) Smale 性について述べる。まず、(Morse) Smale 性をどうするか、ということだが、不安定多様体と安定多様体はどちらも無限次元で、これを無限次元多様体 $\mathcal{B}(Y)$ の中で交差を観察することになる。これを正当化するため、(1) に従い、次の状況をさらに確保する：

- 二つの臨界点 a, b に対して、 $Y \times \mathbb{R}$ 上の負の極限で a 、正の極限で b に収束する、接続の空間をゲージ群で割った configuration space $\mathcal{B}(a, b)$ を定義する。(1) でいうと、2 点をつなぐ path の空間を適切なノルムで完備化したもの [1, Subsection 4.2] を参照。[11] の対応箇所も参照。
- $\mathcal{B}(a, b)$ に Banach 多様体の構造が入ることを示す。(Hausdorff 性も忘れずに) [1, Subsection 4.2] を参照。[11] の対応箇所も参照。
- ASD 方程式が定める bundle $\mathbb{E}(a, b) \rightarrow \mathcal{B}(a, b)$ と section

$$F^+ : \mathcal{B}(a, b) \rightarrow \mathbb{E}(a, b)$$

を書き下す。(1) でいうと、trajectory の方程式 [1, Subsection 4.2] を参照。[11] の対応箇所も参照。

- ASD 方程式の解のモジュライ=trajectory, という同一視を考慮して、ASD 方程式の解のモジュライの transversality が満たされている時、 $cs+\pi$ が Morse-Smale であるという。すなわち、chain complex,

$$\Omega_{Y \times \mathbb{R}}^0(\mathfrak{su}(2)) \xrightarrow{d_A} \Omega_{Y \times \mathbb{R}}^1(\mathfrak{su}(2)) \xrightarrow{d_a^+ + DV_{\pi_a}} \Omega_{Y \times \mathbb{R}}^+(\mathfrak{su}(2))$$

の H^0, H^2 が消えている、ということである。(H^0 は端の臨界点の既約性から勝手に消える) ただし、 V_{π} は、 $cs + \pi$ に対応する ASD 方程式の摂動。[1, Subsection 5.5] を参照。[11] の対応箇所も参照。[8] の対応箇所も参照。最後の、 $\frac{d_a^+ + DV_{\pi_a}}$ の全射性を確保するため、さらに holonomy perturbation を上手く取る。

- (7) 上記の Fredholm section F^+ に無限次元の陰関数定理を適応する。

- (8) 微分が定義できていること、すなわち $\partial^2 = 0$ を示す. このステップは Floer homology の構成のクライマックスである. $\partial^2 = 0$ を導く仕組みを一言でいうと, $\partial^2 = 0$ の左辺に現れる全ての term が向き込みで, コンパクト有向 1 次元多様体の境界の個数であると思えるからである. より詳細に説明する. Floer の chain 複体は, (1) の場合と同様に

$$C := \mathbb{Z}\langle a \in \{(cs + \pi) \text{ の臨界点集合} \} \rangle$$

として与えられ, 微分は, (1) の場合と同様に

$$\partial(a) := \sum_{\text{ind}(a) - \text{ind}(b) = 1} \#M(a, b)/\mathbb{R} \cdot b$$

と定まる. $M(a, b)$ は, $\mathcal{B}(a, b)$ 内の section F^+ の零点, すなわち, a から b への trajectory の空間であり, $\text{ind}(-)$ は, 相対 Morse 指数である. 相対 Morse 指数の定義, 前述 (6) の全射性, 陰関数定理から, $M(a, b)$ には, $\text{ind}(a) - \text{ind}(b) = 1$ 次元の多様体の構造が入り, \mathbb{R} が translation で free, proper, そして, $M(a, b)/\mathbb{R}$ がコンパクトであるように作用している. よって, $M(a, b)/\mathbb{R}$ は有限個の点になり, これを符号付きで数えよ, というのが, $\#M(a, b)/\mathbb{R}$ の意味である. 符号については後で述べる. $\partial^2 = 0$ の証明は以下のように実行される ((1) と同様):

- (i) $\text{ind}(a) - \text{ind}(c) = 2$ なる臨界点を二つ (a, c) 固定する.
- (ii) $M(a, c)/\mathbb{R}$ のコンパクト化を

$$\overline{M(a, c)/\mathbb{R}} := M(a, c)/\mathbb{R} \cup \bigcup_b M(a, b)/\mathbb{R} \times M(b, c)/\mathbb{R}$$

で定義する. (位相については後述の chain convergent 参照)

- (iii) $M(a, c)/\mathbb{R}$ のコンパクト化に (有向)1 次元多様体の構造が入ることを示す.
- (iv) $\overline{M(a, c)/\mathbb{R}}$ の境界を符合込みで数えた式と, $\partial^2(a)$ の c の係数が一致していることをチェック, 前者は 0 なので後者も 0. よって $\partial^2 = 0$.

より詳細な説明を行う. (ii) については, chain convergent と呼ばれる議論を行う. (1) で現れる broken trajectory のコンパクト化に対応するものである. 特に次元 7 以下なら, (1) に現れるコンパクト化と全く同じ形をしている. これについては, [1, Subsection 5.1] 参照. [11] の対応箇所も参照. chain convergent については, [7, Subsection 16.1] の議論もある. ただし, Seiberg-Witten の設定で書かれている.

(iii) は, gluing と呼ばれる手法を使う. Donaldson の元々の Theorem A の証明の際に出てきたような ASD 方程式の解の貼り合わせを行う. gluing 写像の形は, (1) と同様. 証明方法もほとんど同様. 縮小写像の原理を使って, 解を極限として作る, という方法. ここで, exponential decay estimate と呼ばれる評価式を使う. gluing については, [1, Subsection 4.4] 参照.

また, 前述の通り, orientation も必要になる. 閉の場合と違って, 臨界点を固定するごとに定まる $\mathcal{B}(a, b)$ の determinant line bundle の orientation を固定してやる必要がある. ((1) でも対応した議論がある) そのために, determinant line bundle は自明束であることを示す必要がある. 基本的に閉の場合 ([2]) と同様に, $SU(n)$ に帰着する方法が使える. orientation については, [1, Subsection 5.4] 参照.

- (9) 摂動の取り方に依存しないことが示せる根拠は, 摂動の空間が contractible であるから. ここでも例えば, 次のタイプの関係式

$$\partial h + h\partial = f - g$$

を与える必要があるがこれも, $\partial^2 = 0$ と同様の手順でコンパクト 1 次元多様体の境界としてそれぞれの term を実現する, という方法で示される. 詳細は, [1, Subsection 5.3] 参照. この議論も同様のものが, (1) にはある. 同じタイプの議論を用いて, 相対 Donaldson 不変量が cycle を定めること, 相対 Donaldson 不変量が well-defined であることが示される. またこのタイプの議論の延長線上として, Instanton Floer homology の u -写像の構成, surgery exact sequence が示される.

以下は, 注意すべき点リストである:

- 閉の場合と違って, Rellich の補題は全体 $Y \times \mathbb{R}$ では使えない.
- \mathbb{R} の path の空間 ($Y \times \mathbb{R}$ 上のある境界条件を持つ接続たち) への作用は, Sobolev norm を考えるとき, 滑らかではない. なぜなら, \mathbb{R} 方向に微分しようとするとき, Sobolev norm の次数が一つ下がってしまうからである. このような構造は sc-structure と呼ばれ, Hofer 達によって, 定式化されている ([6]). polyfold と呼ばれる枠組みは, (1) をよりシステムチックに構成するものである.
- $\mathcal{B}(Y)$ 上の Morse 指数にあたる Floer 指数は, \mathbb{Z} -valued ではなく, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ -valued になってしまう. これは, $\mathcal{B}(Y)$ の \mathbb{Z} 被覆の被覆変換で接続をずらすと, Morse 指数が 8 の倍数分ずれる, という無限次元特有の現象に由来するものである.
- Donaldson の $SU(2)$ 束を使った Theorem A の証明では, バブルを扱う必要があったが, Floer homology を定義する際には, 高々, 2 次元のモジュライ空間を扱うため (u -写像を扱っても 4 次元), codimension が 8 ないと起こり得ないバブルは, transversality の議論を使うことで回避できる.
- ホモロジー S^3 であることの仮定は, 可約平坦接続の一意性と isolated であることを使った. 他の $U(1)$ 可約接続が混在する状況で摂動に寄らない well-defined な同変 Floer homology を構成することは未解決問題である. 一方で可約接続が現れない状況では, 一般の有向 3 次元多様体に対して定義され, そうして定義されるある version の instanton Floer homology とある version の monopole/Heegaard Floer homology が同型になることが予想されており, 現在 (2021 年 2 月) も非常に活発に研究が進んでいる.
- 上記の構成では, 唯一の可約平坦接続を無視した. これを使うことで, Froyshov 不変量が定義され, 境界付き Theorem A も示される. 示される statement は, Heegaard Floer や monopole Floer の場合と形が違うことに注意. また唯一の可約平坦接続も chain complex にうまく具合に入れることで, 連結和が tensor に対応するようになる.
- Instanton Floer homology の一般論を学ぶより先に, $\Sigma(p, q, r)$ の $SU(2)$ 平坦束の数え上げを使った Casson 不変量の計算などに触れておくと, Instanton Floer homology を計算する際に便利である.⁵ これについては, [9] 参照. $\Sigma(p, q, r)$ の場合は cs はすでに Morse 関数である. 具体例として, 常にこれら (もしくはそれらの connected sum⁶) を念頭に置きながら構成を追えば, より実感が持てると思われる. cs が Morse-Bott の時, より幾何的な perturbation を取ることもできる. また, 3 次元レンズ空間の場合には, 具体的な trajectory を, 同変 ADHM 構成から得られる場合があり, その勉強も, 感性を磨くためには良いかもしれない. また, [5] を読んでおくと, どういう風にトポロジーに応用が出そうか, という感覚が身につく. $\Sigma(p, q, r)$ の Instanton Floer homology の計算の際に使う cobordism やその上の flat connection にも慣れることが出来る. また, Kirby 計算が使えて, negative definite cobordism が作れるよ

⁵knot の pillowcase も良い教材であると思われる.

⁶この場合には cs は Morse-Bott になる

うになっておくと, instanton Floer から定まるホモロジー同値不変量の振る舞いを Seifert 3次元多様体より広い3次元多様体に対して観察できることになる.

- gluing 写像の smoothness は微妙な問題である. すなわち, $\mathcal{B}(a, b)$ 内の (7次元以下の) ASD 方程式の解の空間 $M(a, b)$ のコンパクト化に滑らかな角付き多様体の構造が入るかは, 未解決である. [4] でなされている議論を考えると, gluing map の (微分の) exponential decay estimate を示す必要があると思われる. [4] では symplectic の Floer の状況でこれを示している. また, $M(a, b)$ の次元が 8 より大きく, エネルギーも 1 より大きい時, バブルが起こる場合もある.

Instanton Floer homology を学んだ後の広がり (Floer homology の拡張, 変種の観点から):

- framed instanton Floer homology (monopole/Haagaard との対応が予想されており, 多くの例でチェックされている),
- Fukaya-Floer homology (Y が 3 -sphere でない場合に, Donaldson 不変量を, full に回復する枠組み),
- Theorem B, Theorem C に対応する instanton Floer homology, $\mathcal{B}(Y)$ の cohomology 群の元で捻った instanton Floer homology (境界付き Theorem B, C を実現するもの, sphere bundle の total space に対応する Floer homology),
- singular knot Floer homology (2021 年 3 月の勉強会の内容, singular connection を使った Floer homology, knot の不変量, Khovanov homology との繋がり), web に対する Floer homology,
- sutured instanton Floer homology, contact invariant (あるタイプの境界付き 3次元多様体の Floer homology, コンタクト構造の不変量, コンタクトトポロジーと 3次元多様体のトポロジーの繋がり),
- higher rank instanton Floer homology ($U(n)$ の場合の instanton Floer homology, surgery exact sequence の拡張),
- A^∞ structure, instanton Floer homology for 3-manifolds with boundary (Floer homology の高次の積構造, 3次元多様体の切りほりに対する Floer homology の振る舞い, Atiyah-Floer 予想).

3. APPENDIX

ここでは主に, Instanton Floer homology (および相対 Donaldson 不変量) の構成に現れる解析について参考文献を挙げる.

Hilbert 空間の定義から compact self-adjoint operator のスペクトル分解定理を含む参考文献:

- 関数解析, 黒田成俊, 共立数学講座
- Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Brezis

(多様体上の) Sobolev 空間, L^p 空間, Hölder の不等式, Sobolev 埋め込み, Sobolev 積, Rellich の補題, 楕円型作用素, Gårding の不等式, Hodge 理論を含む参考文献:

- 2012 年度 幾何学 A 多様体上の楕円型微分作用素 -Hodge theorem- 本間 泰史 (早稲田基幹理工) (検索すると手に入る)
- 複素多様体論, 小平邦彦, 岩波書店 (主に付録)
- Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Gilbarg, David, Trudinger, Neil S.
- Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations, Aubin, T

- Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Frank W. Warner
- Fredholm 指数, Fredholm 作用素の扱い, Dirac 作用素, 指数理論を含む参考文献
- 指数定理, 古田幹雄, 岩波書店
- Spin Geometry, H.B. Lawson, Marie-Louise Michelsohn, (Princeton Mathematical Series 38)

上記に挙げた教科書には内容の被りもあるので、ご注意ください。この原稿に関して、コメントをくださった古田幹雄先生、松尾信一郎さん、安達充慶君、飯田暢生君には、感謝申し上げます。

REFERENCES

- [1] S. K. Donaldson. *Floer homology groups in Yang-Mills theory*, volume 147 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. With the assistance of M. Furuta and D. Kotschick.
- [2] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer. *The geometry of four-manifolds*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1990. Oxford Science Publications.
- [3] Andreas Floer. An instanton-invariant for 3-manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 118(2):215–240, 1988.
- [4] Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono. Exponential decay estimates and smoothness of the moduli space of pseudoholomorphic curves. 2016.
- [5] Mikio Furuta. Homology cobordism group of homology 3-spheres. *Invent. Math.*, 100(2):339–355, 1990.
- [6] Helmut H. W. Hofer. Polyfolds and Fredholm theory. In *Lectures on geometry*, Clay Lect. Notes, pages 87–158. Oxford Univ. Press, Oxford, 2017.
- [7] Peter Kronheimer and Tomasz Mrowka. *Monopoles and three-manifolds*, volume 10 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [8] Dietmar Salamon and Katrin Wehrheim. Instanton Floer homology with Lagrangian boundary conditions. *Geom. Topol.*, 12(2):747–918, 2008.
- [9] Nikolai Saveliev. *Invariants of Homology 3-spheres*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 140 (Springer, Berlin), 2002.
- [10] Matthias Schwarz. *Morse homology*, volume 111 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [11] 深谷賢治. ゲージ理論とトポロジー.