§ 2 THE Yang-Mills EQUATIONS

定義　多様体M上のベクトル束η

ηは以下の性質を満たす多様体である。
(ⅰ)全射かつ微分可能な写像$\pi: \eta \to M$が与えられている
(ⅱ)各点$x \in M$に対して$\eta = \pi^{-1}(x)$は一定次元のベクトル空間である
(ⅲ)各点$x \in M$に対して微分同相写像

$$\varphi: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$$

が存在するようなxの近傍Uが存在し

$$\varphi: \pi^{-1}(x) \to x \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$$

はベクトル空間としての同型写像を与える。

定義　ベクトル束ηの変換関数

$\eta \mid \mathcal{O}_\alpha \cong \mathcal{O}_\alpha \times \mathbb{R}^n$となるように$M$の開被覆$\{\mathcal{O}_\alpha\}$をとる。$x \in \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$に対して同型写像

$$\varphi_\alpha(x) \colon \pi^{-1}(x) \to \mathbb{R}^n$$
$$\varphi_\beta(x) \colon \pi^{-1}(x) \to \mathbb{R}^n$$

が二つ存在する。

$$s_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\beta(x) \circ \varphi_\alpha(x)^{-1} \quad : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

とおいて、写像

$$s_{\alpha\beta} \ : \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \to GL(n, \mathbb{R})$$

が定義され $s_{\alpha\beta}$をηの変換関数という。

定義　　多様体M上の主G束P　（　Gはリー群　）

Pは以下の性質を満たす多様体である

(ｉ)全射かつ微分可能な写像$\pi: P \to M$が与えられている

(ⅱ)群GがPに右から作用している。すなわち微分可能な写像

$$P \times G \to P \quad (u, s) \mapsto u \cdot s$$

が与えられていて、以下を満たす

$$(us)s' = u(ss') \; u \in P \quad s, s' \in G$$

$$u \cdot e = u \qquad (\; e\text{は}G\text{の単位元}\;)$$

(ⅱ.a)$\pi(us) = \pi(u) \quad s \in G, \;\; u \in P$

(ⅱ.b)$\pi(u) = \pi(u')$ならば$u' = us$となるGの元sがただ一つ存在する

(ⅲ)Mに開被覆$\{\mathcal{O}_\alpha\}$があり、各$\mathcal{O}_\alpha$上に微分可能な切断$\sigma_\alpha: \mathcal{O}_\alpha \to \pi^{-1}(\mathcal{O}_\alpha) \subset P$が存在する

定義　　主G束Pの変換関数

$P \mid \mathcal{O}_\alpha \cong \mathcal{O}_\alpha \times G$となるように$M$の開被覆$\{\mathcal{O}_\alpha\}$をとる。$x \in \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$に対して同型写像

$$\varphi_\alpha(x)\colon \pi^{-1}(x) \to G$$
$$\varphi_\beta(x)\colon \pi^{-1}(x) \to G$$

が二つ存在する。

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\beta(x) \circ \varphi_\alpha(x)^{-1} \quad : \; G \to G$$

とおいて、写像

$$\psi_{\alpha\beta} \; : \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \to G$$

が定義され$\psi_{\alpha\beta}$をPの変換関数という。

定義　主G束Pに同伴するベクトル束

V をベクトル空間とする。表現 $\rho: G \to Aut(V)$が与えられたとき群Gを$P \times V$に

$$s: (u, v) \mapsto (us, \rho(s)^{-1}v) \quad s \in G, (u, v) \in P \times V$$

と作用させてできた商空間を$P \times_G V$ と表し主G束Pに同伴するベクトル束という。

Pは主G束、Gはリー群、$\mathfrak{g}$はGのリー環とする。

リー群Gの随伴表現$Ad: G \to Aut(\mathfrak{g})$は

$$Ad(s): X \mapsto sXs^{-1} \quad s \in G$$

である

直積$P \times \mathfrak{g}$に同値関係

$$(u, X) \sim (us, Ad(s)^{-1} \cdot X) \quad (u, X) \in P \times \mathfrak{g} \ , s \in G$$

を入れてできた商空間を

$$ad\eta = P \times_G \mathfrak{g}$$

とおく。

定義　接続

$A^0(M)$: 多様体M上の関数全体の集合

$\Gamma(\eta)$: ベクトル束ηの切断全体の集合

ベクトル束 η の接続Dは線形写像

$$D : \Gamma(\eta) \to \Gamma(\eta \otimes T^*M)$$

で

$$D(f\xi) = df \cdot \xi + f \cdot D\xi \qquad (f \in A^0(M), \xi \in \Gamma(\eta))$$

を満たすものとして定義される。

今後、ベクトル束η　に内積(,)が与えられているとき接続Dは

$$d(\sigma, \tau) = (D\sigma, \tau) + (\sigma, D\tau) \qquad (\ \sigma, \tau \in \Gamma(\eta)\ )$$

を満たすとする。

補題　接続Dは$\mathcal{O}_\alpha$上で$D_\alpha = d + A_\alpha$ (　A_αはDの接続形式)と表せる。

証明

V をn次元ベクトル空間とすると$\mathcal{O}_\alpha$上のベクトル束ηの局所標構場$e_1, \cdots e_n$　に対して$De_i \in \Gamma(T^*\mathcal{O}_\alpha \otimes \eta|\mathcal{O}_\alpha)$だから接続形式を$\mathrm{A}_\alpha = ({A_\alpha}^i_j)$とおくと

$$De_i = \sum_{j=1}^{n} A^i_j e_j$$

と表せる。任意の切断$\sigma \in \Gamma(\eta|\mathcal{O}_\alpha)$は

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i e_i$$

と表せるので、

$$D\sigma = D\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_i e_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (d\sigma_i \cdot e_i + \sigma_i \cdot De_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(d\sigma_i \cdot e_i + \sigma_i \cdot \sum_{j=1}^{n} A^i_j e_j \right)$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(d\sigma_i + \sum_{j=1}^{n} A^j_i \sigma_j\right) e_i$$

から導かれる。

補題　$\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$上で接続形式$A_\alpha, A_\beta$についてベクトル束$\eta$の変換関数$s_{\alpha\beta}$を用いて

$$A_\beta = s_{\alpha\beta}^{-1} \cdot A_\alpha \cdot s_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta}^{-1} \cdot ds_{\alpha\beta}$$

が成り立つ。

証明

$\mathcal{O}_\alpha$上の局所標構場をe,$\mathcal{O}_\beta$上の局所標構場をe'とおくと変換関数$s_{\alpha\beta}$を用いて

$$e' = e \cdot s_{\alpha\beta}$$

と表せる。接続形式A_α, A_βを用いて

$$De = eA_\alpha \quad , De' = e'A_\beta$$

と書くと

$$\begin{aligned} De' &= D\left(es_{\alpha\beta}\right) \\ &= De \cdot s_{\alpha\beta} + e \cdot ds_{\alpha\beta} \\ &= eA_\alpha s_{\alpha\beta} + e \cdot ds_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

から

$$es_{\alpha\beta}A_\beta = eA_\alpha s_{\alpha\beta} + eds_{\alpha\beta}$$
$$s_{\alpha\beta}A_\beta = A_\alpha s_{\alpha\beta} + ds_{\alpha\beta}$$
$$A_\beta = s_{\alpha\beta}^{-1} \cdot A_\alpha \cdot s_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta}^{-1}ds_{\alpha\beta}$$

補題　接続Dは$\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$上で変換関数$s_{\alpha\beta}$を用いて

$$D_\beta = s_{\alpha\beta}^{-1} \cdot D_\alpha \cdot s_{\alpha\beta}$$

と表せる。

証明

切断$\sigma \in \Gamma(\eta)$に対して

$$\begin{aligned}
s_{\alpha\beta}^{-1} D_\alpha s_{\alpha\beta}\sigma &= s_{\alpha\beta}^{-1}(d + A_\alpha)(s_{\alpha\beta}\sigma) \\
&= s_{\alpha\beta}^{-1}\left(d(s_{\alpha\beta}\sigma) + A_\alpha(s_{\alpha\beta}\sigma)\right) \\
&= s_{\alpha\beta}^{-1}\left(ds_{\alpha\beta} \cdot \sigma + s_{\alpha\beta} \cdot d\sigma + A_\alpha \cdot s_{\alpha\beta} \cdot \sigma\right) \\
&= s_{\alpha\beta}^{-1} \cdot ds_{\alpha\beta} \cdot \sigma + d\sigma + s_{\alpha\beta}^{-1} \cdot A_\alpha \cdot s_{\alpha\beta} \cdot \sigma \\
&= \left(d + A_\beta\right) \cdot \sigma \\
&= D_\beta \cdot \sigma
\end{aligned}$$

したがって、

$$D_\beta = s_{\alpha\beta}^{-1} \cdot D_\alpha \cdot s_{\alpha\beta}$$

を得る。

定義　曲率

$\Omega^i(\eta) = \Gamma(\eta \otimes \Lambda^i T^* M)$ とおく。線形写像

$$D : \Omega^i(\eta) \to \Omega^{i+1}(\eta)$$

を

$$D(\sigma \otimes \theta) = D\sigma \Lambda \theta + \sigma \otimes d\theta \quad (\ \sigma \in \Gamma(\eta),\ \ \theta \in \Gamma(\Lambda^i T^* M))$$

を満たすものとする。 この時、接続の曲率が

$$D \circ D : \Omega^0(\eta) \to \Omega^2(\eta)$$

と定義される。

曲率 $F = D \circ D$ は局所的には$\mathcal{O}_\alpha$上で

$$F_\alpha = dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha$$

と書ける。

これは$\sigma \in \Gamma(\eta)$ とすると、

$$F_\alpha \sigma = (d + A_\alpha) \circ (d + A_\alpha)\,\sigma$$

$$= d(d\sigma) + d(A_\alpha \sigma) + A_\alpha(d\sigma) + A_\alpha(A_\alpha \sigma)$$

$$= (dA_\alpha)\sigma - A_\alpha \cdot (d\sigma) + A_\alpha \cdot (d\sigma) + A_\alpha \wedge A_\alpha\ \sigma$$

$$= (dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha)\sigma$$

から導かれる。

補題　曲率Fは$F \in \Omega^2(ad\eta)$となる。

証明

$\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$上で変換関数$s_{\alpha\beta}$を用いて$F_\beta = s_{\alpha\beta}^{-1} F_\alpha s_{\alpha\beta}$　を示す。
関係式$D_\beta = s_{\alpha\beta}^{-1} \cdot D_\alpha \cdot s_{\alpha\beta}$を用いて

$$\begin{aligned} F_\beta &= D_\beta \circ D_\beta \\ &= s_{\alpha\beta}^{-1} \cdot D_\alpha \cdot s_{\alpha\beta} \cdot s_{\alpha\beta}^{-1} \cdot D_\alpha \cdot s_{\alpha\beta} \\ &= s_{\alpha\beta}^{-1} \cdot D_\alpha \circ D_\alpha \cdot s_{\alpha\beta} \\ &= s_{\alpha\beta}^{-1} \cdot F_\alpha \cdot s_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

したがって、補題を示せた。

補題

$\mathcal{O}_\alpha$上でMの座標を$x^1, \cdots, x^n$　とすると、曲率は$\mathcal{O}_\alpha$上で

$$F_\alpha = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j F_{\alpha,ij}\, dx^i \wedge dx^j$$

$$F_{\alpha,ij} = \frac{\partial A_{\alpha,j}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{\alpha,i}}{\partial x^j} + \left[A_{\alpha,i}, A_{\alpha,j}\right]$$

と表せる。

証明

$D_\alpha = d + A_\alpha$に対して

$$A_\alpha = \sum_i A_{\alpha,i}\, dx^i$$

としたとき

$$\begin{aligned} dA_\alpha &= \sum_i dA_{\alpha,i} \wedge dx^i \\ &= \sum_i \sum_j \frac{\partial A_{\alpha,i}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial A_{\alpha,j}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j - \frac{\partial A_{\alpha,i}}{\partial x_j} dx^i \wedge dx^j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\alpha \ \wedge \ A_\alpha &= \left(\sum_i A_{\alpha,i}\, dx^i \right) \wedge \left(\sum_j A_{\alpha,j}\, dx^j \right) \\ &= \sum_i \sum_j A_{\alpha,i} \wedge A_{\alpha,j}\, dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(A_{\alpha,i} \wedge A_{\alpha,j} \ - A_{\alpha,i} \wedge A_{\alpha,j} \right) \ dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

上記の二つの式を足すことで求めることが出来る。

定義　Hodgeの$*$作用素

Mは向きづけられた4次元リーマン多様体、$\Omega^2 = \wedge^2 T^*M$とおく
Hodge作用素　$*:\Omega^2 \rightarrow \Omega^2$　を

$$\theta \wedge * \phi = (\theta, \phi) vol \quad \theta, \phi \in \Omega^2$$

によって定義する。(　,　)はΩ^2の内積、vol は体積要素

Hodgeの作用素$*$について

$$*(f_1\phi_1+f_2\phi_2)=f_1*\phi_1+f_2*\phi_2 \quad f_1,f_2\in C^\infty(M) \;\; \phi_1,\phi_2\in\Omega^2$$

が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned}\theta\wedge*(f_1\phi_1+f_2\phi_2) &= (\theta,f_1\phi_1+f_2\phi_2)vol\\ &= (\theta,f_1\phi_1)vol+(\theta,f_2\phi_2)vol\\ &= f_1(\theta,\phi_1)vol+f_2(\theta,\phi_2)vol\\ &= f_1\theta\wedge*\phi_1+f_2\theta\wedge*\phi_2\\ &= \theta\wedge(f_1*\phi_1+f_2*\phi_2)\end{aligned}$$

からみちびかれる。

$*^2 = 1$ となるからHodge作用素 $*$ の固有値は ± 1 である。

その固有空間を $\Omega^2{}_+$, $\Omega^2{}_-$ と書けば、

$$\Omega^2 = \Omega^2{}_+ \oplus \Omega^2{}_-$$

と分解できる。曲率 F は $\Omega^2(ad\eta)$ の元だから

$$\Omega^2(ad\eta) = \Omega^2_+(ad\eta) \oplus \Omega^2_-(ad\eta)$$

と分解できるので、曲率 F は

$$F = F_+ + F_-$$

と分解でき F_+ を自己双対的、F_- を反自己双対的という

定義　自己双対接続、反自己双対接続

曲率 F を $F = F_+ + F_-$ と分解する。このとき、
$F_- = 0$ のとき接続を自己双対接続またはインスタントンといい
$F_+ = 0$ のとき接続を反自己双対接続または反インスタントンという。

定義　ベクトル束ηのゲージ変換

C^∞級の同相写像$s\colon \eta \to \eta$がファイバーη_xをη_xにベクトル空間の同型写像としてうつすときsをηのゲージ変換という

ベクトル束ηの接続Dと曲率Fに対してゲージ変換sはそれぞれ

$$s^*(D) = s^{-1} \circ D \circ s$$
$$s^*(F) = s^{-1} \circ F \circ s$$

と作用する。

定義　チャーン類

ξ はファイバーの次元がrの複素ベクトル束、F は曲率とする。

$$c(\xi) = \det\left(\mathrm{I} + \frac{i}{2\pi}F\right) = 1 + c_1(\xi) + \cdots + c_r(\xi)$$

としたとき$c(\xi)$を全チャーン類、$c_r(\xi)$を第r次チャーン類という。

例① $G = U(1)$の複素直線束λのとき、

曲率を2次微分形式 f とおいて

全チャーン類は、

$$c(\lambda) = 1 + \frac{i}{2\pi}f$$

第１次チャーン類は、

$$c_1(\lambda) = \frac{i}{2\pi}f$$

例② η が階数2のSU(2)バンドルのとき、

曲率Fは

$$F = \begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix} \in su(2)$$

SU(2)のリー環$su(2)$のトレースは $f_1^1 + f_2^2 = 0$ だから

$$\mathrm{c}(\eta) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi} F \right)$$

$$= 1 + \frac{i}{2\pi}(f_1^1 + f_2^2) + \frac{1}{4\pi^2}(f_2^1 \wedge f_1^2 - f_1^1 \wedge f_2^2)$$

$$c_1(\eta) = \frac{i}{2\pi}(f_1^1 + f_2^2) = 0$$

$$c_2(\eta) = \frac{1}{4\pi^2}(f_2^1 \wedge f_1^2 - f_1^1 \wedge f_2^2)$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} tr(F \wedge F)$$

定義　交差形式

Mをコンパクトで向きづけられた4次元多様体とする。Mのドラーム・コホモロジー類を$H_{DR}{}^{*}(M)$と表すと、$\alpha, \beta \in H_{DR}{}^{2}(M)$にたいして$M$の交差形式を

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge \beta$$

と定義する。

$SU(2)$バンドルη　が複素直線束λ_1, λ_2 を使って　$\eta = \lambda_1 \oplus \lambda_2$　と表せるとき

$$c(\eta) = c(\lambda_1 \oplus \lambda_2)$$

$$= c(\lambda_1) \cdot c(\lambda_2)$$

$$= \left(1 + \frac{i}{2\pi} f_1\right) \cdot \left(1 + \frac{i}{2\pi} f_2\right)$$

$$= 1 + \frac{i}{2\pi}(f_1 + f_2) - \frac{1}{4\pi^2}(f_1 \wedge f_2)$$

$$c_1(\eta) = \frac{i}{2\pi}(f_1 + f_2) = c_1(\lambda_1) + c_1(\lambda_2) = 0$$

したがって、$c_1(\lambda_2) = -c_1(\lambda_1)$

$$c_2(\lambda) = c_1(\lambda_1) \cdot c_1(\lambda_2)$$

$$= -c_1(\lambda_1) \cdot c_1(\lambda_1)$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2} tr(F \wedge F)$$

$$k = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M tr(F \wedge F)$$

とおく

$\alpha = \pm c_1(\lambda_1)$ とおき、ω を交差形式とすると

$$k = \omega(\alpha, \alpha)$$

となる。

補題
多様体M上の第2次チャーン数を持つ$SU(2)$バンドルηが直線束に分割されるための必要十分条件は$\alpha \in H^2(M,\mathbb{Z})$に対して

$$\omega(\alpha,\alpha)=k$$

が成り立つことである。

定義　Yang-Mills汎関数

Mを4次元リーマン多様体、η をM上の構造群$G = SU(2)$のベクトル束とする。

$\mathfrak{g} = su(2)$ の内積を

$$(A, B) = -tr(\,AB\,) \quad (\,A\,, B\; \in su(2))$$

とおく。

接続Dに対する曲率$F_D \in \Omega^2(ad\eta)$ についてYang-Mills汎関数を

$$ym(D) = \int_M |F_D|^2 * 1$$

とおく。

Yang-Mills汎関数の極値問題を考える
$\sigma \in \Gamma(\eta)$　$D \in \mathcal{A}$　Aは接続形式とおくと

$$F_{D+tA}\sigma = (D+tA)(D+tA)\sigma$$

$$= D^2\sigma + t(D(A\sigma) + A \wedge D\sigma) + t^2(A \wedge A)\sigma$$

$$= [F_D + t(DA) + t^2(A \wedge A)]\sigma$$

が成り立つ。したがって、

$$F_{D+tA} = F_D + t(DA) + t^2(A \wedge A)$$

が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}ym(D+tA)|_{t=0} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\int_M (F+tDA+t^2A\wedge A, F+tDA+t^2A\wedge A)*1$$

$$= 2\int_M (DA+2t\,A\wedge A, F+tDA+t^2A\wedge \mathrm{A})|_{t=0}*1$$

$$= 2\int_M (DA,F)*1$$

$$= 2\int_M (A,D^*F)*1$$

$D^*:\Omega^2(ad\eta) \to \Omega^1(ad\eta)$ はD$:\Omega^1(ad\eta) \to \Omega^2(ad\eta)$ の随伴作用素で

$$D^* = -*D*$$

とあらわされる。任意のAに対して、$\frac{d}{dt}ym(D+tA)|_{t=0} = 0$ となるのは

$$D^*F_D = 0$$

の時である。
$D^*F_D = 0$が成り立っているときFはYang-Mills場、DはYang-Mills接続という

またBiachiの恒等式$DF_D = 0$ はつねに成立している。

曲率Fはゲージ変換sで$s^*(F) = s^{-1} \circ F \circ \ s$ となる。

また、$\mathfrak{g}$の内積はAdG不変だからYang-Mills汎関数はゲージ変換のもとで不変になる。

したがって、接続全体の集合を$\mathcal{A}$、ゲージ変換群を$\mathcal{G}$とおくとymは商空間$\mathcal{A}/\mathcal{G}$　上の関数である。

$$tr(F \wedge F) = tr(F_+ \wedge F_+) + tr(F_- \wedge F_-)$$

$$= tr(F_+ \wedge * F_+) - tr(F_- \wedge * F_-)$$

$$= -|F_+|^2 + |F_-|^2$$

SU(2)バンドルη　は$c_2(\eta) = \frac{1}{8\pi^2} tr(F \wedge F)$ となり

$$k = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M tr(F \wedge F)$$

とおいた。

$$8\pi^2 k = \int_M |F_+|^2 - |F_-|^2$$

$k > 0$ のとき$ym \geq 8\pi^2 k$　等号成立は$F_- = 0$

$k < 0$ のとき$ym \leq -8\pi^2 k$　等号成立は$F_+ = 0$

Fが自己双対的または反自己双対的のとき$D^*F = 0$をみたす
これはFが自己双対的のときBianchiの恒等式$DF = 0$を用いて

$$\begin{aligned} D^*F &= * D * F \\ &= * D ** F \\ &= * DF \\ &= 0 \end{aligned}$$

から導かれる。反自己双対的のときも同様に導ける。

Fが自己双対的のときゲージ変換sで移した曲率も自己双対的となる
これは、Hodge作用素$*$とゲージ変換sが可換であることを利用して

$$\begin{aligned} *(s^{-1} \circ F \circ s) &= s^{-1} * F \circ s \\ &= s^{-1} \circ F \circ s \end{aligned}$$

から導かれる。

自己双対接続全体の集合をゲージ変換全体で割った商集合を

$$\mathfrak{M} = \{D \in \mathcal{A} : F_D = * F_D\} / \mathcal{G}$$

とおく。

定理
多様体Mは閉多様体とする。λが直線束のとき、Yang-Mills接続d'の曲率は調和形式となる。

証明

$$ad(\lambda) = M \times i\mathbb{R}$$

Yang-Mills接続d'の曲率を$f_{d'} \in \Omega^2(ad\lambda)$とおく。このとき、

$$d'f = 0, d'^*f = 0$$

が成り立つ。$(d\varphi, f) = (\varphi, d^*f)$

$$(\Delta f, f) = (d \circ d^* f, f) + (d^* \circ df, f) = (df, df) + (d^* f, d^* f)$$
$$\Delta f = 0 \Leftrightarrow df = 0, d^* f = 0$$