

線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第5回 ('15年11月4日：Keywords … 基底の延長、部分ベクトル空間の補空間、あるベクトルで生成されるベクトル空間を解空間とする連立一次方程式)

まとめ.

5-1. 基底の延長定理 … $\mathcal{V}_0 = \{v_1, \dots, v_k\}$ を有限生成ベクトル空間 V の一次独立なベクトルとする. このとき、 $\mathcal{V}_0$ にいくつかのベクトル $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ を加えた集合 $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ を V の基底とすることができる.

5-2. 部分ベクトルの補空間 … $W \subset V$ を部分ベクトルとする. このとき、 V の部分空間 W' であり、 $W' \cap W = \{0\}$ かつ、 $W + W' = V$ となる部分ベクトル空間 W' を部分ベクトル空間 W の補空間という.

今日の課題.

1. 基底を延長すること.
2. 補空間 (およびその基底) を求めること.

A-5-1. [基底を延長すること]

次の一次独立なベクトルを延長して基底を作れ.

- (1) $V = \mathbb{C}^3, {}^t(1, 2, 1), {}^t(0, 2, 1)$
- (2) $V = \mathbb{C}[x]_3, 1 + x + 3x^2, 1 + 2x + 3x^2$
- (3) $V = \mathbb{C}[x]_4, 1 + x + x^2 + x^3 + x^4, 1 - x - x^2 + x^4$

A-5-2. [補空間の基底]

ベクトル空間 V において、次の部分ベクトル空間 W の基底を求め、その補空間の基底を求めよ. ただし、 u_1, u_2, u_3, u_4 はある一次独立なベクトルとする.

- (1) $V = \mathbb{C}^3, W = \left\{ v \in V \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = 0 \right\}$
- (2) $V = \mathbb{C}[x]_3, W = \{v \in V \mid f(1) = 0, f(0) = 0\}$
- (3) $V = \mathbb{C}[x]_3, W = \{v \in V \mid \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} v = 0\}$
- (4) $V = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle, W = \langle 2u_2 - u_1, u_1 - u_3 \rangle$

A-5-3. [転置行列]

次の行列の転置行列を求めよ.

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

A-5-4. [あるベクトル空間が満たす連立一次方程式]

次のベクトル空間を解空間とする連立一次方程式を求めなさい.

- (1) $V = \langle {}^t(1, 2, 0), {}^t(0, 2, -1) \rangle$
- (2) $V = \langle {}^t(2, -1, 1, -2), {}^t(3, 0, -5, -2) \rangle$
- (3) $V = \langle {}^t(0, 1, 1), {}^t(1, 1, 1) \rangle$
- (4) $V = \langle {}^t(1, 1, 1), {}^t(5, 3, -2) \rangle$

(5) $V = \langle {}^t(2, 2, 1), {}^t(4, 3, -3) \rangle$

B-5-1. [基底の延長]

次の一次独立なベクトルを延長して V 上の基底をつくれ．ただし、 u_1, u_2, u_3, u_4 はある一次独立なベクトルとする．

- (1) $V = \mathbb{C}[x]_3, \{1 + x - x^2, 1 - x, x + x^2\}$
- (2) $V = \mathbb{C}[x]_4, \{1 + x - x^2, x + x^2, x^2 + x^3\}$
- (3) $V = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \{2u_1 - u_2, u_1 - 2u_2 + u_3\}$
- (4) $V = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle, \{u_1 - u_2, u_1 + u_2\}$

B-5-2. [補空間の構成]

次の部分ベクトル空間 $W \subset V$ の補空間の基底を求めよ．

- (1) $V = \mathbb{C}^3, W = \langle {}^t(1, 0, 2) \rangle$
- (2) $V = \mathbb{C}^4, W = \langle {}^t(-1, 0, 2, 1), {}^t(2, 2, 3, 0) \rangle$

B-5-3. [部分ベクトル空間、補空間]

$V = \mathbb{C}[x]_2$ とする． $a \neq b$ とする．

- (1) $W = \{f \in V | f(a) = f(b) = 0\}$ となる部分ベクトル空間の基底を求めよ．
- (2) W の補空間をひとつ求めよ．

B-5-4. [ベクトルの関係式の表示]

$V = \mathbb{C}[x]_2$ において、 V 上に成り立つ任意の一次関係式をある $a, b, c \in \mathbb{C}$ を使って $af(0) + bf(1) + cf(2) = 0$ として表すことができるか？

B-5-5. [ベクトル空間から連立一次方程式]

次のベクトルからなるベクトル空間を解空間とする連立一次方程式

- (1) $V = \mathbb{C}^3, \{{}^t(1, 0, -1), {}^t(0, 1, 1)\}$
- (2) $V = \mathbb{C}^3, \{{}^t(-2, 0, 1), {}^t(2, 1, 1)\}$
- (3) $V = \mathbb{C}^3, \{{}^t(0, 1, -1), {}^t(-1, 1, 1)\}$
- (4) $V = \mathbb{C}^4, \{{}^t(2, 2, 1, 0), {}^t(0, 1, -1, 0)\}$

B-5-6. [数列からなるベクトル空間]

次の漸化式からなる数列のベクトル空間における基底を求めよ．

- (1) $s(\mathbb{C}), a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$
- (2) $s(\mathbb{C}), a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n$

B-5-7. [数列]

a_n を $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n$ を満たす実数列とする．このとき、 $b_n = a_{n+1}a_n$ が満たす漸化式を求めよ．

B-5-8. [有限生成ベクトル空間]

有限生成ベクトル空間には必ず、有限個の基底が存在することを示せ．

B-5-9. [無限生成ベクトル空間]

区間 $[0, 2\pi]$ において、 $f(0) = f(2\pi)$ を満たす連続関数全体の成すベクトル空間を $C(S^1)$ とする．この $C(S^1)$ は有限生成でないことを示せ．
(ヒント：三角関数のなす部分ベクトル空間が有限生成でないことを示せ．)

C-5-1. [補空間]

次の部分ベクトル空間 $W \subset V$ について考える．

(1) 部分ベクトル空間 $W \subset V$ の補空間はひとつとは限らない．その理由を簡単で具体的な例を使って説明せよ．

(2) $V = \mathbb{C}^4$, $W = \left\{ v \in V \mid \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \right\}$ とする． W の補空間 W_1 をひとつ与えよ．

(3) W_1 と別の補空間 W_2 で、それが W_1 の補空間になっているものを与えよ．

C-5-2. [基底の延長]

次の一次独立なベクトルを延長して $\mathbb{C}[x]_5$ 上の基底をつくれ．

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5, 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5, 1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5$$

C-5-3. [ベクトル空間の成す連立一次方程式]

次のベクトルたちで張られるベクトル空間が満たす連立一次方程式を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

HP : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/sen.html>

Blog : (<http://motochans.blogspot.jp/>)

相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント1ページ目上部．