数学リテラシー2

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第1,2回（'22年5月31日）

実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して，$M \in \mathbb{R}$ が任意の $a \in A$ に対して $a \leq M$ が成り立つとき，M は A の**上界**といい，$A \subset \{x \in \mathbb{R} | x \leq M\}$ が成り立つ．上界が存在するとき，A は**上に有界**という．

実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して，$M \in \mathbb{R}$ が任意の $a \in A$ に対して $a \geq M$ が成り立つとき，M は A の**下界**といい，$A \subset \{x \in \mathbb{R} | x \geq M\}$ が成り立つ．下界が存在するとき，A は**下に有界**という．

実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界かつ下に有界であるとき，A は**有界**という．

A の下界全体の集合を $L(A)$ と書き，A の上界全体の集合を $U(A)$ とかく．$A \subset \mathbb{R}$ に対して，$U(A) \neq \emptyset$ であれば，$U(A)$ の最小値，$L(A) \neq \emptyset$ であれば，$L(A)$ の最大値は必ず存在することを実数の**連続性公理**という．$U(A) \neq \emptyset$ のとき，$U(A)$ の最小値を A の**上限**といい，$\sup A$ とかき，$L(A) \neq \emptyset$ のとき，$L(A)$ の最大値を A の**下限**といい，$\inf A$ とかく．

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に**収束する**とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在し, $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つことである. このことを論理記号を用いて表すと,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 \quad \text{s.t.} \quad n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

や

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ [n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon]$$

のように書くことができる.

ただし、$\forall$ は「任意の」と読み、$\exists$ は「ある〜が存在して」と読み、s.t. は、「〜となるような $\cdots$ 」と読む。

演習問題

問題 1 [上界，下界]
π の小数展開に応じて以下の数列のなす集合 $A = \{3, 3.14, 3.141, 3.1415, \cdots\}$ を考える．$U(A)$ と $L(A)$ を求めよ．

問題 2 [上限，下限]
2つの区間 A, B を $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 集合 $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ のそれぞれを求めよ．

(2) A の上界の集合 $U(A)$ と上限 $\sup A$ を求めよ．

(3) B の下界の集合 $L(B)$ と下限 $\inf B$ を求めよ．

問題 3 [上限，下限]
次の集合の上限，下限を求めよ．

(1) $A = \{x \in \mathbb{R} | 3x + 2 < 5\}$

(2) $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \leq 0\}$

(3) $C = \{x \in \mathbb{R} | x^3 > 27\}$

$\boxed{\text{問題 4}}$ [上界，上限，下限，下界]
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_1 = 1, a_n = \begin{cases} \dfrac{2a_{n-1} - 1}{3} & n \text{ が奇数} \\ \dfrac{a_{n-1} + 2}{3} & n \text{ が偶数} \end{cases}$$

と定める．集合 $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ の上限，下限を求めよ．

$\boxed{\text{問題 5}}$ [上限，下限]
上に有界な部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して，最大値 $\max A$ が存在すれば，上限 $\sup A$ に一致することを示せ．

$\boxed{\text{問題 6}}$ [ε-N 論法 1]
以下で与えられる実数列の極限値 α を推測したうえで, $n \geq N$ のとき $|a_n - \alpha| < 10^{-2}$ を満たすような自然数 N はいくつ以上であればよいか調べよ.

(1) $a_n = 2^{-n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$

(2) $a_n = \dfrac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$

(3) $a_1 = a,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$ ただし, a は実定数.

$\boxed{\text{問題 7}}$ [ε-N 論法 2]
実数列

$$a_n = 2 + \frac{1}{n^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

を考える.

(1) $n \geq N$ のとき, $|a_n - 2| < 10^{-4}$ を満たすような自然数 N を 1 つ求めよ.

(2) $\lim_{n \to \infty} a_n = 2$ であることを, ε-N 論法を用いて示せ.

$\boxed{\text{問題 8}}$ [ε-N 論法 3]
$a_n = \dfrac{1}{n}$ は 0 に収束し、1 に収束しないことを ϵ-N 論法を用いて示せ.

$\boxed{\text{問題 9}}$ [ε-N 論法 4]
次の数列 a_n は，任意の ϵ に対してどれほど大きく自然数 N を取れば $\forall n > N$ に対して $a_n < \epsilon$ となるか?

(1) $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$

(2) $a_n = \dfrac{1}{1 + e^n}$

(3) $a_n = \dfrac{n^2 + n}{3n^3 + 1}$

$\boxed{\text{問題 10}}$ [ε-N 論法 5]
$a_n = \dfrac{1}{2^n + 3^n}$ は 0 に収束することを示せ.

$\boxed{\text{問題 11}}$ [ε-N 論法 6]
$a_n = (-1)^n$ はどこにも収束しないことを示せ.

$\boxed{\text{問題 12}}$ [ε-N 論法 7]
実数列

$$a_n = \frac{3n-1}{3n+1}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える.

(1) $n \geq N$ のとき, $|a_n - 1| < 10^{-2}$ を満たすような自然数 N を 1 つ求めよ.

(2) $n \geq N$ のとき, $|a_n - 1| < 10^{-4}$ を満たすような自然数 N を 1 つ求めよ.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ であることを, ε-N 論法を用いて示せ.

$\boxed{\text{発展問題 13}}$ [ε-N 論法 8]
正数 $k > 1$ に対して, 以下の命題は同値であることを示せ:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ [n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon]. \tag{1}$$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ [n \geq N_2 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < k\varepsilon]. \tag{2}$$

$\boxed{\text{発展問題 14}}$ [ε-N 論法 9]
以下の命題は同値であることを示せ:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ [n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon]. \tag{3}$$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ [n \geq N_2 \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \varepsilon]. \tag{4}$$

参考文献

[1] 原 惟行, 松永 秀章, イプシロン・デルタ論法完全攻略, 共立出版, 2011.