数学リテラシー2

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 1,2 回 （'22 年 5 月 31 日)

実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して，$M \in \mathbb{R}$ が任意の $a \in A$ に対して $a \leq M$ が成り立つとき，M は A の**上界**といい，$A \subset \{x \in \mathbb{R} | x \leq M\}$ が成り立つ．上界が存在するとき，A は**上に有界**という．

実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して，$M \in \mathbb{R}$ が任意の $a \in A$ に対して $a \geq M$ が成り立つとき，M は A の**下界**といい，$A \subset \{x \in \mathbb{R} | x \geq M\}$ が成り立つ．下界が存在するとき，A は**下に有界**という．

実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界かつ下に有界であるとき，A は**有界**という．

A の下界全体の集合を $L(A)$ と書き，A の上界全体の集合を $U(A)$ とかく．$A \subset \mathbb{R}$ に対して，$U(A) \neq \emptyset$ であれば，$U(A)$ の最小値，$L(A) \neq \emptyset$ であれば，$L(A)$ の最大値は必ず存在することを実数の**連続性公理**という．$U(A) \neq \emptyset$ のとき，$U(A)$ の最小値を A の**上限**といい，$\sup A$ とかき，$L(A) \neq \emptyset$ のとき，$L(A)$ の最大値を A の**下限**といい，$\inf A$ とかく．

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に**収束する**とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在し, $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つことである．このことを論理記号を用いて表すと,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 \quad \text{s.t.} \quad n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

や

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ [n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon]$$

のように書くことができる．

ただし、$\forall$ は「任意の」と読み、$\exists$ は「ある〜が存在して」と読み、s.t. は、「〜となるような $\cdots$ 」と読む。

演習問題

$\boxed{\text{問題 1}}$ [上界，下界]

π の小数展開に応じて以下の数列のなす集合 $A = \{3, 3.14, 3.141, 3.1415, \cdots\}$ を考える．$U(A)$ と $L(A)$ を求めよ．

(答え) $U(A) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq \pi\}$, $L(A) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$.

$\boxed{\text{問題 2}}$ [上限，下限]

2 つの区間 A, B を $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 集合 $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ のそれぞれを求めよ．

(2) A の上界の集合 $U(A)$ と上限 $\sup A$ を求めよ．

(3) B の下界の集合 $L(B)$ と下限 $\inf B$ を求めよ．

(答え)

(1)$A \setminus B = A \cap B^c = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$ $\quad B \setminus A = B \cap A^c = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ $\quad A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$

(2)$U(A) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\} = [1, \infty)$, $\sup A = 1$

(3)$L(B) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\} = (-\infty, 0]$, $\inf B = 0$

$\boxed{\text{問題 3}}$ [上限，下限]

次の集合の上限，下限を求めよ．

(1) $A=\{x\in\mathbb{R}|3x+2<5\}$

(2) $B=\{x\in\mathbb{R}|x^2\leq 0\}$

(3) $C=\{x\in\mathbb{R}|x^3>27\}$

(答え)
(1) $A=\{x\in\mathbb{R}|x<1\}=(-\infty,1)$, $\sup A=1$, $\inf A=-\infty$
(2) $B=\{0\}$, $\sup B=\inf B=0$
(3) $C=\{x\in\mathbb{R}|x>3\}=(3,\infty)$, $\sup C=\infty$, $\inf C=3$.

$\boxed{\text{問題 4}}$ [上界，上限，下限，下界]
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_1=1, a_n=\begin{cases}\dfrac{2a_{n-1}-1}{3} & n\text{ が奇数}\\ \dfrac{a_{n-1}+2}{3} & n\text{ が偶数}\end{cases}$$

と定める．集合 $\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$ の上限，下限を求めよ．
(答え) 教科書問 1,3,3 の答えを見よ。

$\boxed{\text{問題 5}}$ [上限，下限]
上に有界な部分集合 $A\subset\mathbb{R}$ に対して，最大値 $\max A$ が存在すれば，上限 $\sup A$ に一致することを示せ．

(答え) $\max A$ は $\forall x\in A$ に対して、$x\leq\max A$ を満たす。よって、$\max A$ は A の上界である。よって、上限の定義から $\sup A\leq\max A$ である。$\sup A$ が A の上界であり、$\max A\in A$ であることから、$\max A\leq\sup A$ である。ゆえに $\max A=\sup A$ である。
(教科書問 1,3,4 の答えも参照せよ)

$\boxed{\text{問題 6}}$ [ε-N 論法 1]
以下で与えられる実数列の極限値 α を推測したうえで, $n\geq N$ のとき $|a_n-\alpha|<10^{-2}$ を満たすような自然数 N はいくつ以上であればよいか調べよ.

(1) $a_n=2^{-n},\quad (n=1,2,3,\ldots)$.

(2) $a_n=\dfrac{n}{n+1}\quad (n=1,2,3,\ldots)$.

(3) $a_1=a,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1,\quad (n=1,2,3,\ldots)$. ただし, a は実定数.

(答え) 教科書 問 6.3.1 を見よ. □

$\boxed{\text{問題 7}}$ [ε-N 論法 2]
実数列

$$a_n=2+\frac{1}{n^2},\quad (n=1,2,3,\ldots)$$

を考える.

(1) $n\geq N$ のとき, $|a_n-2|<10^{-4}$ を満たすような自然数 N を 1 つ求めよ.

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=2$ であることを, ε-N 論法を用いて示せ.

(答え)

教科書 例 6.2.1 を見よ. □

$\boxed{\text{問題 8}}$ [ε-N 論法 3]

$a_n = \dfrac{1}{n}$ は 0 に収束し、1 に収束しないことを ϵ-N 論法を用いて示せ.

(答え) 実数 $\epsilon > 0$ を任意にとる。ある $\dfrac{1}{\epsilon} < N$ となる自然数 N をとる。このとき、$\forall n > N$ に対して、

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

となる。よって、$a_n \to 0$ となる。

ある実数 $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ をとる。任意の自然数 N に対して、$n > N$ のとき、

$$|a_n - 1| = 1 - \frac{1}{n} \geq \epsilon = \frac{1}{2}$$

となる。よって、a_n は 1 に収束しない. □

$\boxed{\text{問題 9}}$ [ε-N 論法 4]

次の数列 a_n は，任意の ϵ に対してどれほど大きく自然数 N を取れば $\forall n > N$ に対して $a_n < \epsilon$ となるか？

(1) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

(2) $a_n = \dfrac{1}{1+e^n}$

(3) $a_n = \dfrac{n^2+n}{3n^3+1}$

(答え)

(1) $\forall \epsilon > 0$ をとる。$\dfrac{1}{\epsilon} < N$ となる自然数 N をとる。このとき、$\forall n > N$ に対して $|a_n| = \dfrac{n}{n^2+1} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N} < \epsilon$ である。

(2) $\forall \epsilon > 0$ をとる。$\log \dfrac{1}{\epsilon} < N$ となる自然数 N をとる。このとき、$\forall n > N$ に対して $|a_n| = \dfrac{1}{1+e^n} < \dfrac{1}{e^n} < \dfrac{1}{e^N} < \epsilon$ である。

(3) $\forall \epsilon > 0$ をとる。$\dfrac{2}{3\epsilon} < N$ となる自然数 N をとる。このとき、$\forall n > N$ に対して $|a_n| = \dfrac{n^2+n}{3n^3+1} < \dfrac{n^2+n^2}{3n^3} = \dfrac{2}{3n} < \dfrac{2}{3N} < \epsilon$ である。

$\boxed{\text{問題 10}}$ [ε-N 論法 5]

$a_n = \dfrac{1}{2^n+3^n}$ は 0 に収束することを示せ.

(答え)

実数 $\epsilon > 0$ を任意にとる。ある $\log_2 \dfrac{1}{\epsilon} < N$ となる自然数 N をとる。このとき、$\forall n > N$ に対して、

$$|a_n - 0| = \frac{1}{2^n+3^n} < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \epsilon$$

となる。よって、$a_n \to 0$ となる。

$\boxed{\text{問題 11}}$ [ε-N 論法 6]
$a_n = (-1)^n$ はどこにも収束しないことを示せ.

(答え)
教科書 問 6.3.2 を見よ. □

$\boxed{\text{問題 12}}$ [ε-N 論法 7]
実数列

$$a_n = \frac{3n-1}{3n+1}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

を考える.

(1) $n \geq N$ のとき, $|a_n - 1| < 10^{-2}$ を満たすような自然数 N を 1 つ求めよ.

(2) $n \geq N$ のとき, $|a_n - 1| < 10^{-4}$ を満たすような自然数 N を 1 つ求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ であることを, ε-N 論法を用いて示せ.

(答え) (1) 67 (実際は 67 以上の任意の自然数であればよい. 以下も同様).
(2) 667.
(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$N = \max\left\{1, \left[\frac{2}{3\varepsilon} - \frac{1}{3}\right] + 1\right\}$$

と選べばよい.

□

$\boxed{\text{発展問題 13}}$ [ε-N 論法 8]
正数 $k > 1$ に対して, 以下の命題は同値であることを示せ:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ [n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon]. \tag{1}$$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ [n \geq N_2 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < k\varepsilon]. \tag{2}$$

(答え) (1)$\Longrightarrow$(2) を示す.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N_2 = N_1$ と選ぶと,

$$n \geq N_2 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon < k\varepsilon$$

が成り立つ.
(2)$\Longrightarrow$(1) を示す.
(2) の命題は,

$$\forall\eta > 0,\ \exists N_2(\eta) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ [n \geq N_2(\eta) \Longrightarrow |a_n - \alpha| < k\eta]$$

と書くことができる. ここで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, η を ε/k と置き直すと, ある自然数 $N_2(\varepsilon/k)$ が決まって,

$$n \geq N_2(\varepsilon/k) \Longrightarrow |a_n - \alpha| < k \cdot \varepsilon/k = \varepsilon$$

が成り立つ. 従って, $N_1 = N_2(\varepsilon/k)$ と選ぶと,

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ.

□

$\boxed{\text{発展問題 14}}$ [ε-N 論法 9]
以下の命題は同値であることを示せ:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ [n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon]. \tag{3}$$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ [n \geq N_2 \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \varepsilon]. \tag{4}$$

(答え) (3)$\Longrightarrow$(4) を示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N_2 = N_1$ と定めれば,

$$n \geq N_2 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \varepsilon$$

が成り立つ.
(4)$\Longrightarrow$(3) を示す. (4) の命題は,

$$\forall\eta > 0,\ \exists N_2(\eta) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ [n \geq N_2(\eta) \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \eta]$$

と書くことができる. ここで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, η を $\varepsilon/2$ と置き直すと, ある自然数 $N_2(\varepsilon/2)$ が決まって,

$$n \geq N_2(\varepsilon/2) \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \varepsilon/2$$

が成り立つ. 従って, $N_1 = N_2(\varepsilon/2)$ と選ぶと,

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

が成り立つ.

□

参考文献

[1] 原 惟行, 松永 秀章, イプシロン・デルタ論法完全攻略, 共立出版, 2011.