数学リテラシー2

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第3,4回（'22 年 6 月 7 日)

実数の連続性公理 …「実数上の部分集合 A の空ではない全ての上界の集合 $U(A)$ には最小値を持つ.」もしくは「実数上の部分集合 A の空ではない全ての下界の集合 $L(A)$ には最大値を持つ.」という公理のこと．この公理は「実数において上に有界な単調な増加列は収束する.」もしくは「実数において下に有界な単調な減少列は収束する.」と言い換えることができる．これは収束する実数が存在するという意味である.

関数の極限値 … 関数 $f(x)$ が $x \to a$ において極限値 α に収束するとは，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$$

が成り立つことをいう.

演習問題

以下の問題に答えよ．教科書で証明した挟み撃ちの原理や，$\lim$ の線形性 ($\lim(a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ や $\lim ca_n = c \lim a_n$) や実数の連続性公理を用いてよい.

$\boxed{\text{問題 1}}$ [ϵ-N 論法 1]
$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ は 0 に収束することを示せ.

$\boxed{\text{問題 2}}$ [ϵ-N 論法 2]
実数 a を $|a| < 1$ とする．このとき、$a_n = na^n$ は 0 に収束することを定義に基づいて示せ.

$\boxed{\text{問題 3}}$ [ϵ-N 論法 3]
次の数列が収束することを示せ．また不等式を工夫するなどしてこの数列の上界でなるべく小さい実数を見つけよ.

(1) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$

(2) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3}$

(3) $a_n = \dfrac{\log 2}{1+2^2} + \dfrac{\log 3}{1+3^2} + \cdots + \dfrac{\log n}{1+n^2}$

$\boxed{\text{問題 4}}$ [ϵ-N 論法 4]
$\sqrt[n]{n}$ が 1 に収束することを教科書にならって証明せよ．また，これと同じ方法により，$b_n = \sqrt[n]{n^{\log n}}$ が 1 に収束することを示せ.

$\boxed{\text{問題 5}}$ [ϵ-N 論法 5]
$\sqrt[n]{n!}$ は無限大に発散することを示せ.

$\boxed{\text{問題 6}}$ [ϵ-N 論法 6]
次の漸化式で与えられる実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 1 に収束することを示せ.

$$a_1 = 2,\ 3a_{n+1} - 2a_n - 1 = 0$$

$\boxed{\text{問題 7}}$ [ϵ-N 論法 7]
実数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとする. すべての $n = 1, 2, 3, ...$ に対して $b_n \neq 0$ でありかつ $\beta \neq 0$ であれば, ある $K > 0$ が存在して, すべての $n = 1, 2, 3, ...$ に対して $|b_n| \geq K > 0$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{\text{問題 8}}$ [ϵ-N 論法 8]
$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ で与えられる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加列である（したがって, ある有限の実数に収束）ことを証明せよ.

$\boxed{\text{問題 9}}$ [ϵ-N 論法 9]
実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$ が成り立つとする. このとき

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

で定義される実数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても等式 $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{\text{問題 10}}$ [ϵ-N 論法 10]
実数列 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) - \log n$ を考えよう．区分求積法を用いて $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正で狭義減少列であることを示すことにより，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある実数 $\gamma \in \mathbb{R}$ に収束することを示せ.

$\boxed{\text{問題 11}}$ [関数の極限値 1]
$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ と $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ であるとき以下を定義に従って示せ.

(1) $c \in \mathbb{R}$ に対して，$\lim_{x\to a} cf(x) = c\alpha$ となる.

(2) 全ての $x \in I \setminus \{a\}$ において $g(x) \neq 0$ ではなく $\beta \neq 0$ であるとき，$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ となる.

$\boxed{\text{問題 12}}$ [関数の極限値 2]
次の関数の極限を定義に従って求めよ.

(1) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x}$

(2) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x+1}$

(3) $\lim_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}$.

$\boxed{\text{問題 13}}$ [関数の極限値 3]
記号 $\lfloor x \rfloor$ を実数 x を超えない最大の整数と定義する．関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor - \dfrac{1}{2} & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

と定義する．このとき，以下の問題に答えよ．

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(-x) = -f(x)$ であることを示せ．

(2) $f(x)$ の $x \to 0$ での極限値は存在するか？

(3) $f(x)$ を $[0,1]$ 上の関数としたとき，$x \to 0$ の極限値は存在するか？もし存在すればその値を求めよ．