$\boxed{\text{数学リテラシー2}}$

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 3,4 回（'22 年 6 月 7 日)

実数の連続性公理…「実数上の部分集合 A の空ではない全ての上界の集合 $U(A)$ には最小値を持つ.」もしくは「実数上の部分集合 A の空ではない全ての下界の集合 $L(A)$ には最大値を持つ.」という公理のこと．この公理は「実数において上に有界な単調な増加列は収束する.」もしくは「実数において下に有界な単調な減少列は収束する.」と言い換えることができる．これは収束する実数が存在するという意味である.

関数の極限値… 関数 $f(x)$ が $x \to a$ において極限値 α に収束するとは，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$$

が成り立つことをいう.

演習問題

以下の問題に答えよ．教科書で証明した挟み撃ちの原理や，lim の線形性 ($\lim(a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ や $\lim ca_n = c \lim a_n$) や実数の連続性公理を用いてよい.

$\boxed{\text{問題 1}}$ [ϵ-N 論法 1]

$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ は 0 に収束することを示せ.

(答え) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$$

ととれば, $n \geq N$ となる任意の n に対して

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{1/\varepsilon^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{1/\varepsilon^2}} = \varepsilon$$

となる.

$\boxed{\text{問題 2}}$ [ϵ-N 論法 2]

実数 a を $|a| < 1$ とする．このとき、$a_n = na^n$ は 0 に収束することを定義に基づいて示せ.

(答え) $\dfrac{1}{|a|} = 1 + b$ とおくと、b は正の数となる。よって、$\dfrac{1}{|a|^n} = (1+b)^n > \dfrac{n(n-1)b^2}{2}$ となる。$\forall \epsilon > 0$ に対して、

$$|a_n - 0| = \frac{n}{(1+b)^n} < \frac{2n}{n(n-1)b^2} = \frac{2}{(n-1)b^2} < \frac{2}{(N-1)b^2} < \epsilon$$

を満たし、a_n は 0 に収束する。

$\boxed{\text{問題 3}}$ [ϵ-N 論法 3]

次の数列が収束することを示せ．また不等式を工夫するなどしてこの数列の上界でなるべく小さい実数を見つけよ.

(1) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$

(2) $a_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$

(3) $a_n = \frac{\log 2}{1+2^2} + \frac{\log 3}{1+3^2} + \cdots + \frac{\log n}{1+n^2}$

(答え) (1) 教科書の問 6.3.2 を見よ.

(2) 部分分数分解

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

より,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

が成り立つので, $n \geq 3$ に対し,

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \\
&\leq 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} \\
&= 1 + \frac{1}{2^3} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
&= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n-1)n}\right\} \\
&< 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{11}{8}
\end{aligned}$$

が成り立つから, この数列は上に有界である. 単調増加性は明らかなので, この数列はある実数 α に収束する.

参考: この実数 α はアペリー定数と呼ばれていて,

$$\alpha \approx 1.20205\cdots$$

と続く無理数であることが知られている.

(3) $y = \log x$ とおくとき、§ を用いて $y^2 < 2e^y$ が成り立つので、$\log x < \sqrt{2x}$ が成り立つ。よって、

$$\frac{a_n}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{2}}{1+2^2} + \frac{\sqrt{3}}{1+3^2} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{1+n^2} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

であり、区分求積法を用いて、$y = x^{-\frac{3}{2}}$ と比べることにより、$a_n/\sqrt{2} < \int_1^n x^{-\frac{3}{2}}dx = [-2x^{-\frac{1}{2}}]_1^n = 2 - \frac{1}{\sqrt{n}} < 2$ となる。よって、a_n は上界 $2\sqrt{2}$ をもつ。よって a_n は収束する。

$\boxed{\text{問題 4}}$ [ϵ-N 論法 4]

$\sqrt[n]{n}$ が 1 に収束することを教科書にならって証明せよ. また, これと同じ方法により, $b_n = \sqrt[n]{n^{\log n}}$ が 1 に収束することを示せ.

(答え) $\sqrt[n]{n} = a_n = 1 + b_n$ とすると $b_n > 0$ であり、$n = (1+b_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}b_n^2$ であるから、$b_n^2 \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$ であり、$\frac{1}{\sqrt{n-1}} \to 0$ であるから挟み撃ちの原理から $b_n \to 0$ である。よって $a_n \to 1$ である。

後半の答えは最後。

$\boxed{\text{問題 5}}$ [ϵ-N 論法 5]
$\sqrt[n]{n!}$ は無限大に発散することを示せ.
(答え) $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots \lfloor\frac{n}{2}\rfloor\cdots n} > \sqrt[n]{1\cdot 1\cdots 1\cdot \lfloor\frac{n}{2}\rfloor\cdots \lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$

$$> \sqrt[n]{\left(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\right)^{n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}} \geq \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2n}} \geq \sqrt{\frac{n-1}{2}} \to \infty$$

であるから、$\sqrt[n]{n!} \to \infty$ が成り立つ。

$\boxed{\text{問題 6}}$ [ϵ-N 論法 6]
次の漸化式で与えられる実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 1 に収束することを示せ.

$$a_1 = 2,\ 3a_{n+1} - 2a_n - 1 = 0$$

(答え) 教科書の問 6.3.3 の解答を見よ.

$\boxed{\text{問題 7}}$ [ϵ-N 論法 7]
実数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとする. すべての $n = 1, 2, 3, ...$ に対して $b_n \neq 0$ でありかつ $\beta \neq 0$ であれば, ある $K > 0$ が存在して, すべての $n = 1, 2, 3, ...$ に対して $|b_n| \geq K > 0$ が成り立つことを示せ.
(答え) 教科書の問 6.3.4 の解答を見よ.

$\boxed{\text{問題 8}}$ [ϵ-N 論法 8]
$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ で与えられる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加列である（したがって, ある有限の実数に収束）ことを証明せよ.
(答え) 教科書の問 6.3.5 の解答を見よ.

$\boxed{\text{問題 9}}$ [ϵ-N 論法 9]
実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$ が成り立つとする. このとき

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

で定義される実数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても等式 $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ が成り立つことを示せ.
(答え) 教科書の問 6.3.6 の解答を見よ.

$\boxed{\text{問題 10}}$ [ϵ-N 論法 10]
実数列 $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \log n$ を考えよう．区分求積法を用いて $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正で狭義減少列であることを示すことにより，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある実数 $\gamma \in \mathbb{R}$ に収束することを示せ.
(答え) 教科書の問 6.3.7 の解答を見よ.

$\boxed{\text{問題 11}}$ [関数の極限値 1]
$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ と $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ であるとき以下を定義に従って示せ.

(1) $c \in \mathbb{R}$ に対して，$\lim_{x\to a} cf(x) = c\alpha$ となる.

(2) 全ての $x \in I \setminus \{a\}$ において $g(x) \neq 0$ ではなく $\beta \neq 0$ であるとき，$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ となる.

(答え) 教科書の命題 6.4.1 を見よ.

$\boxed{\text{問題 12}}$ [関数の極限値 2]
次の関数の極限を定義に従って求めよ.

(1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x}$

(2) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}$

(3) $\lim_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$

(4) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x+1}{2x+1}$.

(答え) (1) 初めから $x>0$ で考えてよい．任意の $\varepsilon>0$ に対して,

$$\delta=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}>0$$

とおくと, $|x-1|<\delta$ ならば $1-\delta<x$ であることに注意し,

$$\left|\frac{1}{x}-1\right|=\frac{|x-1|}{x}<\frac{\delta}{1-\delta}=\varepsilon$$

となる．

(2) $\forall\epsilon>0$ に対して、$\delta<\min\left\{\dfrac{1}{2},2\epsilon\right\}$ とすると、$|x-1|<\delta$ となる任意の x に対して、$-\delta+1<x<\delta+1$ より、$x>\dfrac{1}{2}$ であるから

$$|\sqrt{x+1}-\sqrt{2}|=\frac{|x+1-2|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}<\frac{\delta}{\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{2}}<\frac{\delta}{2}<\epsilon$$

であるから、$x\to 1$ のとき、$\sqrt{x+1}\to\sqrt{2}$ がいえる。

(3) $\forall\epsilon>0$ に対して、$0<\delta<\epsilon$ をとなる実数 δ をとる。$|x|<\delta$ となる任意の x に対して

$$|x\sin\frac{1}{x}-0|\leq|x|<\delta<\epsilon$$

が成り立つので、$x\to 0$ の時、$x\sin\dfrac{1}{x}\to 0$ が成り立つ。

(4) $\forall\epsilon>0$ に対して $0<\delta<\min\left\{\dfrac{1}{2},6\epsilon\right\}$ となる実数 δ をとる。このとき、$|x-1|<\delta$ となる任意の x に対して、$1-\delta<x<1+\delta$ より、$x>\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{x-1}{3(2x+1)}\right|<\frac{\delta}{3(1+1)}=\frac{\delta}{6}<\epsilon$$

となる。よって $\dfrac{x+1}{2x+1}\to\dfrac{2}{3}\ \ (x\to 1)$ がいえる。

$\boxed{\text{問題 13}}$ [関数の極限値 3]

記号 $\lfloor x\rfloor$ を実数 x を超えない最大の整数と定義する．関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}x-\lfloor x\rfloor-\dfrac{1}{2} & x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

と定義する．このとき，以下の問題に答えよ．

(1) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(-x)=-f(x)$ であることを示せ．

(2) $f(x)$ の $x \to 0$ での極限値は存在するか？

(3) $f(x)$ を $[0,1]$ 上の関数としたとき，$x \to 0$ の極限値は存在するか？もし存在すればその値を求めよ．

(答え) (1) $x \in \mathbb{Z}$ であるとき、$f(x) = 0$ だから明らかに $f(-x) = -f(x)$ が成り立つ。$x \notin \mathbb{Z}$ であるとき、$f(-x) = -x + \lfloor(-x)\rfloor - \frac{1}{2} = -x + 1 - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} = -(x - \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}) = -f(x)$ が成り立つ。

(2) もし、$x > 0$ において $x \to 0$ としたとき、関数は、$x = 0$ の十分近くで、$f(x) = x - \frac{1}{2}$ であるから $\lim_{x \to 0}(x - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ である。また、$x < 0$ において $x \to 0$ としたとき、関数は、$x = 0$ の十分近くで、$f(x) = x - (-1) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}$ であるから、$\lim_{x \to 0}(x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ となる。よって、これらは一致しない。

(3) $f(x)$ が $[0,1]$ 上の関数としたら、これは、上で示したように $f(x) = x - \frac{1}{2}$ であるから、極限値は存在して $-\frac{1}{2}$ となる。

問題4の後半の証明

§から $y > 0$ に対して $y^3 < 6e^y$ が成り立つ。とくに $y = \log n$ とおくと、$\log n < \sqrt[3]{6n}$ がわかる。

$\sqrt[n]{n^{\log n}} < \sqrt[n]{n^{\sqrt[3]{6n}}} = 1 + b_n$ として、$b_n \to 0$ であることを示す。両辺を n 乗して $n^{\sqrt[3]{6n}} = (1 + b_n)^n$ より $n = (1 + b_n)^{\frac{n}{\sqrt[3]{6n}}} = (1 + b_n)^{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\sqrt[3]{n^2}} > (1 + b_n)^{\frac{1}{2}\sqrt[3]{n^2}}$ であるから、§§を用いて十分大きい n に対して、

$$n > \frac{\frac{1}{2}\sqrt[3]{n^2}(\frac{1}{2}\sqrt[3]{n^2} - 1)}{2} b_n^2 > \frac{\frac{1}{2}\sqrt[3]{n^2}\frac{1}{4}\sqrt[3]{n^2}}{2} b_n^2 = \frac{\sqrt[3]{n^4}}{16} b_n^2$$

よって、$b_n^2 < \frac{16n}{\sqrt[3]{n^4}} = \frac{16}{\sqrt[3]{n}}$ であるから、

$$0 < b_n < \frac{4}{\sqrt[6]{n}} \to 0$$

より挟み撃ちの原理により $b_n \to 0$ である。□

以下上で使った不等式を証明しておく。

$\boxed{\text{§: } x > 0 \text{ のとき、不等式 } 6e^x > x^3 + 3x^2 \text{ が成り立つ。}}$

(証明)

$f(x) = 6e^x - x^3 - 3x^2$ とおく。$f'(x) = 6e^x - 3x^2 - 6x,\ f''(x) = 6e^x - 6x - 6,\ f'''(x) = 6e^x - 6 > 0$ である。よって、$f''(x)$ は単調増加で、$f''(x) > f''(0) = 6 > 0$ よって $f'(x)$ は $x > 0$ で単調増加となる。従って $f'(x) > f'(0) = 0$ より $f(x)$ は $x > 0$ で単調増加となる。よって $f(x) > f(0) = 0$ となる。□

$\boxed{\text{§§: } x > 0,\ y > 2 \text{ のとき、不等式 } (1+x)^y > 1 + yx + \frac{y(y-1)x^2}{2} \text{ が成り立つ。}}$

(証明)

ここで、$x > 0,\ y > 2$ であるとき、

$$f(x) = (1+x)^y - \left(1 + yx + \frac{y(y-1)x^2}{2}\right)$$

とおくと、$f(0) = 0$ であり、$f'(x) = y(1+x)^{y-1} - (y + xy(y-1))$ かつ、

$$f''(x) = y(y-1)(1+x)^{y-2} - y(y-1) = y(y-1)((1+x)^{y-2} - 1) > 0$$

であり、$f''(x)$ は $x > 0$ で単調増加であるから、$f''(x) > f''(0) = 0$ よって、$f'(x)$ は単調増加であり、$f'(x) > f'(0) = 0$ であるから、$f(x)$ は単調増加である。よって、$f(x) > f(0) = 0$ となる。よって、$x > 0$

かつ $y > 0$ のとき、

$$(1+x)^y > 1 + yx + \frac{y(y-1)x^2}{2}$$

が成り立つ。