$\boxed{\text{数学リテラシー}2}$

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 5,6 回（'22 年 6 月 14 日)

$I \subset \mathbb{R}$ を任意の区間とする．I 上の関数 f が点 $a \in I$ で**連続**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し,

$$x \in I \wedge |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つことである．論理式で書くと,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \ [|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$$

となる．関数の極限の定義のときと違って, $0 < |x - a| < \delta$ ではないことに注意せよ．なぜならば, 関数 f は $x = a$ での値が既に定義されているからである．

関数 f が I の各点で連続であるとき, f は I **上で連続である**という．論理式で書くと,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in I, \exists \delta > 0, \forall x \in I \ [|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon] \tag{1}$$

となる．このとき, δ は<u>ε と a に依存して決まっている</u>.

第 5 回演習問題

$\boxed{\text{問題 } 1}$ [関数の連続性 1]
次の関数が $x = 0$ で連続であることを定義に従って示せ。

(1) $y = e^x$

(2) $y = x^2$

(3) $y = \sin x$

$\boxed{\text{問題 } 2}$ [関数の連続性 1]
次の関数が各点で連続であることを定義に従って証明せよ。

(1) $y = ax$

(2) $y = 2x^2 + 1$

(3) $y = |x|$

$\boxed{\text{問題 } 3}$ [関数の連続性 2]
実数係数の n 次多項式

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i, \quad (c_n \neq 0)$$

は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 4}}$ [関数の連続性 3]
関数

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = e^x$$

は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 5}}$ [関数の連続性 4]
関数 f は開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上定義され, 関数 g は開区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上定義されているとする. 全ての $x \in I$ に対して $f(x) \in J$ が成り立つとき, 合成関数 $g \circ f$ は I 上で連続であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 6}}$ [関数の連続性 5]
関数 f, g は区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上定義された連続関数であるとする. このとき,

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

は区間 I 上で連続であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 7}}$ [関数の連続性 6]
関数

$$f(x) = \begin{cases} |x|/x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は $x = 0$ で連続ではないことを示せ.

$\boxed{\text{問題 8}}$ [関数の連続性 7]
不連続な点を持つ関数の例を数個あげよ. また, 任意の区間 $I \subset \mathbb{R}$ の全ての点で不連続な関数は存在するか.

発展

区間 I 上の関数 f の連続性の定義 (1) における δ は ε と a に依存していた. これを踏まえて, δ が ε のみに依存する, すなわち,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall a \in I, \forall x \in I \ [|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon] \tag{2}$$

が成り立つとき, 関数 f は I 上で**一様連続である**という. 一様連続ならば連続であるが, 逆は一般に成り立たない.

発展問題

$\boxed{\text{問題 9}}$ [関数の連続性]
関数

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \cos x$$

は $I=[0,\infty)$ 上で一様連続であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 10}}$ [関数の連続性]
関数 f は区間 $I\subset\mathbb{R}$ 上で微分可能であり $f'(x)$ が I 上で有界ならば, f は I 上で一様連続であることを示せ.

第 6 回演習問題

$\boxed{\text{問題 11}}$ [行列式]
3 次元ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ に対して、$A=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ の行列式を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ の内積、外積を用いて表せ。またそのようになることを証明せよ。

$\boxed{\text{問題 12}}$ [外積の幾何的意味]
空間内のベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の外積の絶対値がその 2 辺を隣あう辺にもつ平行四辺形の面積に等しくなることを 3×3 行列の行列式が平行六面体の体積になることを用いて説明せよ。

$\boxed{\text{問題 13}}$ [内積]
次のベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を求めよ。また、この $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角度 θ について、$|\cos\theta|$ を求めよ。

(1) $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$

(2) $\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\3\end{pmatrix}$

(3) $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

(4) $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{問題 14}}$ [外積]
上の問題のベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の外積を求めよ。また、原点、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ と $\vec{u}+\vec{v}$ で作られる平行四辺形の面積を求めよ。

$\boxed{\text{問題 15}}$ [空間図形]
3 次元ベクトル $\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{c}}$ に対して, 次を示せ.

(1) $(\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}})\times\vec{\boldsymbol{c}}=(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}})\vec{\boldsymbol{b}}-(\vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}})\vec{\boldsymbol{a}}$.

(2) $(\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}})\times\vec{\boldsymbol{c}}+(\vec{\boldsymbol{b}}\times\vec{\boldsymbol{c}})\times\vec{\boldsymbol{a}}+(\vec{\boldsymbol{c}}\times\vec{\boldsymbol{a}})\times\vec{\boldsymbol{b}}=0$ (ヤコビ恒等式).

$\boxed{\text{問題 16}}$ [i 列目に他の j 列目の定数倍を足して得られる行列の行列式]
A を $n \times n$ 行列とする。A の α 列目を $\vec{a}_\alpha$ とする。つまり、$A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_\alpha \cdots \vec{a}_n)$ である。次に、i 列目として、$\vec{a}_i$ に他の j 列目 $\vec{a}_j$ の実数倍を足して得られるベクトルとし、i 列目以外の j 列目を $\vec{a}_j$ のままにして構成された行列を B とする。つまり、$B = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \cdots (\vec{a}_i + c\vec{a}_j) \cdots \vec{a}_n)$ である。教科書の命題 4.2.3 の多重線形性と命題 4.2.2 を用いて、行列 A と B の行列の行列式は等しいことを示せ。

$\boxed{\text{問題 17}}$ [2×2 の行列式の幾何的意味]
A を $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ を用いて $(\vec{a}_1 \vec{a}_2)$ とする。このとき、$|\det(A)|$ は $\vec{0}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ を結んで得られる平行四辺形の面積であることを上の問題の性質を用いることで、証明せよ。

$\boxed{\text{問題 18}}$ [3×3 の行列式の幾何的意味]
A を $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ を用いて $(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3)$ とする。このとき、$|\det(A)|$ は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ を用いて作られる平行六面体の体積であることを示せ。