数学リテラシー2

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第5,6回（'22年6月14日）

$I \subset \mathbb{R}$ を任意の区間とする. I 上の関数 f が**点** $a \in I$ **で連続**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し,

$$x \in I \wedge |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つことである. 論理式で書くと,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \ [|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$$

となる. 関数の極限の定義のときと違って, $0 < |x-a| < \delta$ ではないことに注意せよ. なぜならば, 関数 f は $x = a$ での値が既に定義されているからである.

関数 f が I の各点で連続であるとき, f は I **上で連続である**という. 論理式で書くと,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in I, \exists \delta > 0, \forall x \in I \ [|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon] \tag{1}$$

となる. このとき, δ は $\underline{\varepsilon \text{ と } a \text{ に依存して決まっている}}$.

演習問題

$\boxed{\text{問題 1}}$ [関数の連続性 1]
次の関数が $x = 0$ で連続であることを定義に従って示せ。

(1) $y = e^x$

(2) $y = x^2$

(3) $y = \sin x$

(答え) (1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \log(\varepsilon + 1)$ とすると, $|x - 0| < \delta$ となる任意の x に対して、$|y(x) - y(0)| = |e^x - 1| < |e^\delta - 1| = \varepsilon$ が成り立つ, すなわち $y = e^x$ は $x = 0$ で連続である.
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ とすると, $|x - 0| < \delta$ となる任意の x に対して、 $|y(x) - y(0)| = |x^2 - 0| < |\delta^2| = \varepsilon$ が成り立つ, すなわち $y = x^2$ は $x = 0$ で連続である.
(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \varepsilon$ とすると, $|x - 0| < \delta$ となる任意の x に対して、 $|y(x) - y(0)| = |\sin x - 0| \leq |x| < \delta = \varepsilon$ が成り立つ, すなわち $y = \sin x$ は $x = 0$ で連続である.

$\boxed{\text{問題 2}}$ [関数の連続性 2]
次の関数が各点で連続であることを定義に従って証明せよ。

(1) $y = ax$

(2) $y = 2x^2 + 1$

(3) $y = |x|$

(答え) (1) $a = 0$ の場合, $\forall \epsilon > 0$ において $\delta = 1$ とすると、$|x - a| < \delta$ となる任意の x に対して、$|0 \cdot x - 0 \cdot a| = 0 < \epsilon$ となり連続となる。
$a \neq 0$ の場合、$\forall \epsilon > 0$ に対して、$\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ としてとると、$|x-b| < \delta$ となる任意の x に対して、$|ax-ab| = |a(x-b)| < |a|\delta = \epsilon$ となるから、$y = ax$ は連続である。
(2) $\forall \epsilon > 0$ に対して、$\delta = \min\left\{1, \dfrac{\epsilon}{2(1+2|a|)}\right\}$ としてとると、$|x-a| < \delta$ となる任意の x に対して、$|x+a| \leq |x-a|+|2a| < \delta+2|a| \leq 1+2|a|$ となるから $|2x^2+1-2a^2-1| = 2|x-a||x+a| < 2\delta(1+2|a|) \leq \epsilon$ となるから、$y = 2x^2+1$ は連続である。
(3) まず、$a \neq 0$ としよう。$\forall \epsilon > 0$ をとする。$\delta = \{\varepsilon, |a|\}$ としてとる。$|x-a| < \delta$ となる任意の x に対して、$a - \delta < x < a + \delta$ であり、$a > 0$ なら $a - \delta > 0$ であり、$a < 0$ なら $a + \delta < 0$ であるから、x, a は同符号であるから $||x| - |a|| = |x-a| < \delta = \varepsilon$ となるから、$y = |x|$ は連続である。
次に、$a = 0$ とする。$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\delta = \varepsilon$ とする。$|x| < \delta = \epsilon$ より、$y = |x|$ は $x = 0$ で連続である。

$\boxed{\text{問題 3}}$ [関数の連続性 3]
実数係数の n 次多項式

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i, \quad (c_n \neq 0)$$

は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ.
(答え) 教科書の問 6.5.1 を見よ.

$\boxed{\text{問題 4}}$ [関数の連続性 4]
関数

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = e^x$$

は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ.
(答え) $x = a$ での関数 $y = f(x)$ の連続性を考える。$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\delta = \varepsilon$ とするとき、$|x - a| < \delta$ となる任意の x に対して、

$$|\sin x - \sin a| = 2|\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}| \leq 2|\frac{x-a}{2}| < \delta = \varepsilon$$

となる。(ここで、不等式 $|\sin X| \leq |X|$ は証明なくもちいた。)
$x = a$ での関数 $y = g(x)$ の連続性を考える。$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\delta = \log(1+\varepsilon)$ とする。このとき、$|x-a| < \delta$ となる任意の x に対して、

$$|e^x - e^a| = e^a|e^{x-a} - 1| < e^|x-a| - 1 < e^\delta - 1 = (1+\varepsilon) - 1 = \varepsilon$$

よって、$x = a$ で連続である。
(ここで、$|e^X - 1| \leq e^{|X|} - 1 \Leftrightarrow -e^{|X|} + 1 \leq e^X - 1 \leq e^{|X|} - 1 \Leftrightarrow -e^{|X|} + 2 \leq e^X \leq e^{|X|}$ となる不等式を用いた。)

$\boxed{\text{問題 5}}$ [関数の連続性 5]
関数 f は開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上定義され, 関数 g は開区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上定義されているとする. 全ての $x \in I$ に対して $f(x) \in J$ が成り立つとき, 合成関数 $g \circ f$ は I 上で連続であることを示せ.
(答え) 教科書の問 6.5.3 を見よ.

$\boxed{\text{問題 6}}$ [関数の連続性 6]
関数 f, g は区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上定義された連続関数であるとする. このとき,

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

は区間 I 上で連続であることを示せ.

(答え) 教科書の問 6.5.4 を見よ.

$\boxed{\text{問題 7}}$ [関数の連続性 7]
関数

$$f(x) = \begin{cases} |x|/x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は $x = 0$ で連続ではないことを示せ.
(答え) 教科書の問 6.5.5 を見よ.

$\boxed{\text{問題 8}}$ [関数の連続性 8]
不連続な点を持つ関数の例を数個あげよ. また, 任意の区間 $I \subset \mathbb{R}$ の全ての点で不連続な関数は存在するか.
(答え) 例えば,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

で定義される関数は $\mathbb{R}$ 上全ての点で不連続である. これは**ディリクレ関数**と呼ばれている.
$a \in I$ とする。
a が有理数であるとする。$\epsilon = \dfrac{1}{2}$ とする。$\forall \delta > 0$ に対して $|x_0 - a| < \delta$ となる無理数 x_0 が存在する。なぜなら、アルキメデスの公理から $n\delta > 1$ となる自然数 n が存在して、$\dfrac{1}{n} < \delta$ である。$x_0 = a + \dfrac{1}{\sqrt{2}n}$ とおくと、$|x_0 - a| = \dfrac{1}{\sqrt{2}n} < \dfrac{1}{n} < \delta$ が成り立つ。また x_0 は無理数である。もし有理数であるとすると、$\dfrac{1}{(x_0 - a)n} = \sqrt{2}$ が成り立つ。左辺は有理数だが、右辺は無理数となり矛盾する。よって、x_0 は無理数である。従って $|f(x_0) - f(a)| = |0 - 1| = 1 \geq \dfrac{1}{2}$ であるから $f(x)$ は任意の有理数で連続ではない。
また、$a \in I$ が無理数であるとする。$\epsilon = \dfrac{1}{2}$ とする。$\forall \delta > 0$ に対して、$|x_0 - a| < \delta$ となる有理数 x_0 が存在する。なぜなら、同様にアルキメデスの公理から $\dfrac{1}{n} < \delta$ となる自然数 n が存在して、$[a - \delta, a + \delta]$ において、$\dfrac{m}{n}$ なる有理数は必ず存在する。もし存在しないとする。$\dfrac{k}{n} \leq a - \delta$ となる最大の自然数 k をとると、仮定から $a + \delta \leq \dfrac{k+1}{n}$ であるが、これから直ちに $2\delta < \dfrac{1}{n}$ となるが、$2\delta < \dfrac{1}{n} < \delta$ となり矛盾する。よって、有理数が $\dfrac{m}{n}$ の形の有理数が $[a - \delta, a + \delta]$ に存在する。よって、$|f(x_0) - f(a)| = |1 - 0| = 1 \geq \dfrac{1}{2}$ であるから a においても不連続。 □

発展

区間 I 上の関数 f の連続性の定義 (**??**) における δ は ε と a に依存していた. これを踏まえて, δ が ε のみに依存する, すなわち,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall a \in I, \forall x \in I \ [|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon] \tag{2}$$

が成り立つとき, 関数 f は I **上で一様連続である**という. 一様連続ならば連続であるが, 逆は一般に成り立たない.

発展問題

$\boxed{\text{問題 9}}$ [関数の連続性]
関数

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \cos x$$

は $I = [0, \infty)$ 上で一様連続であることを示せ.

(答え)
任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \varepsilon$ と定めると, 任意の $a, x \in I$ に対し,

$$|x-a| < \delta \Longrightarrow |\sin x - \sin a| = \left|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq 2\cdot 1\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a| < \delta = \varepsilon$$

が成り立つ. g に関しても同様.

$\boxed{\text{問題 10}}$ [関数の連続性]
関数 f は区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で微分可能であり $f'(x)$ が I 上で有界ならば, f は I 上で一様連続であることを示せ.

(答え) 任意の $x, x' \in I$ を $x' < x$ と取っても一般性を失わない. 区間 $[x', x]$ 上でラグランジュの平均値の定理を用いると,

$$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = f'(c)$$

を満たす $c \in (x', x)$ が存在する. 仮定より $f'(x)$ は I 上で有界なので,

$$|f(x) - f(x')| = |f'(c)||x - x'| \leq M|x - x'|$$

を満たす正定数 M が存在する. 従って, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \varepsilon/M$ と定めると, 任意の $x, x' \in I$ に対し,

$$|x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'| < M\delta = \varepsilon$$

が得られる. 故に, f は I 上で一様連続である.

演習問題

$\boxed{\text{問題 11}}$ [行列式]
3 次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して、$A = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ の行列式を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の内積、外積を用いて表せ。またそのようになることを証明せよ。

(答え) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とおくと、サラスの公式を用い、c_1, c_2, c_3 についてまとめてみると、

$$\det\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - (a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2)$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$\boxed{\text{問題 12}}$ [外積の幾何的意味]

空間内のベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の外積の絶対値がその 2 辺を隣あう辺にもつ平行四辺形の面積に等しくなることを 3×3 行列の行列式が平行六面体の体積になることを用いて説明せよ。

(答え)

$$|\det(\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{x})| = |(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{x}| = |\vec{u}\times\vec{v}|\cdot|\vec{x}|\cdot|\cos\theta|$$

であり、左辺は平行六面体の体積であり、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ を用いた平行四辺形を底面とする。このとき、$\vec{u}\times\vec{v}$ は、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の両方に直交するから、$|x|\cdot|\cos\theta|$ はその六面体の高さである。よって、$\vec{u}\times\vec{v}$ はこの平明六面体の底面の面積である。

$\boxed{\text{問題 13}}$ [内積]

次のベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を求めよ。また、この $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角度 θ について、$|\cos\theta|$ を求めよ。

(1) $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$

(2) $\vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\3\end{pmatrix}$

(3) $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

(4) $\vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$

(答え) (1)$8, \dfrac{8}{\sqrt{70}}$
(2)$12, \dfrac{12}{\sqrt{770}}$
(3)$-5, \dfrac{1}{\sqrt{6}}$
(4)$9, \dfrac{9}{\sqrt{182}}$

$\boxed{\text{問題 14}}$ [外積]

上の問題のベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の外積を求めよ。また、原点、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ と $\vec{u}+\vec{v}$ で作られる平行四辺形の面積を求めよ。

(答え) (1)$\sqrt{6}$
(2)$\sqrt{626}$
(3)$5\sqrt{5}$
(4)$\sqrt{101}$

$\boxed{\text{問題 15}}$ [空間図形]

3 次元ベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}$ に対して, 次を示せ.

(1) $(\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}})\times\vec{\boldsymbol{c}} = (\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}})\vec{\boldsymbol{b}} - (\vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}})\vec{\boldsymbol{a}}$.

(2) $(\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}})\times\vec{\boldsymbol{c}} + (\vec{\boldsymbol{b}}\times\vec{\boldsymbol{c}})\times\vec{\boldsymbol{a}} + (\vec{\boldsymbol{c}}\times\vec{\boldsymbol{a}})\times\vec{\boldsymbol{b}} = 0$ (**ヤコビ恒等式**).

(答え) 教科書の問 5.2.1 を見よ.

$\boxed{\text{問題 16}}$ [i 列目に他の j 列目の定数倍を足して得られる行列の行列式]
A を $n \times n$ 行列とする。A の α 列目を $\vec{a}_\alpha$ とする。つまり、$A = (\vec{a}_1\vec{a}_2 \cdots \vec{a}_\alpha \cdots \vec{a}_n)$ である。次に、i 列目として、$\vec{a}_i$ に他の j 列目 $\vec{a}_j$ の実数倍を足して得られるベクトルとし、i 列目以外の j 列目を $\vec{a}_j$ のままにして構成された行列を B とする。つまり、$B = (\vec{a}_1\vec{a}_2 \cdots (\vec{a}_i + c\vec{a}_j) \cdots \vec{a}_n)$ である。教科書の命題 4.2.3 の多重線形性と命題 4.2.2 を用いて、行列 A と B の行列の行列式は等しいことを示せ。
(答え)
行列式の多重線形性から、

$$\det(B) = \det(\vec{a}_1\vec{a}_2 \cdots (\vec{a}_i + c\vec{a}_j) \cdots \vec{a}_n)$$

$$= \det(\vec{a}_1\vec{a}_2 \cdots \vec{a}_i \cdots \vec{a}_n) + c\det(\vec{a}_1\vec{a}_2 \cdots \vec{a}_j \cdots \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1\vec{a}_2 \cdots \vec{a}_i \cdots \vec{a}_n) = \det(A)$$

$\boxed{\text{問題 17}}$ [2×2 の行列式の幾何的意味]
A を $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ を用いて $(\vec{a}_1\vec{a}_2)$ とする。このとき、$|\det(A)|$ は $\vec{0}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ を結んで得られる平行四辺形の面積であることを上の問題の性質を用いることで、証明せよ。
(答え) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ とする。$a_{11} \neq 0$ とし、$\vec{b} = \vec{a}_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とする。

$$|\det(\vec{a}_1\vec{a}_2)| = |\det\Bigl(\vec{a}_1(\vec{a}_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\vec{a}_1)\Bigr)| = |\det\bigl(\vec{a}_1\vec{b}\bigr)| = |a_{11}b_2|$$

である。よって、$a_{11}b_2$ は $\vec{a}_1$ と $\vec{b}$ からなる平行四辺形の面積である。これは $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ からなる平行四辺形の面積になる。$a_{11} = 0$ とする。このとき、$|\det(\vec{a}_1\vec{a}_2)| = |a_{12}a_{21}|$ このとき、同様に $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ からなる面積となる。

$\boxed{\text{問題 18}}$ [3×3 の行列式の幾何的意味]
A を $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ を用いて $(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3)$ とする。このとき、$|\det(A)|$ は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ を用いて作られる平行六面体の体積であることを示せ。
(答え) まず、$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が同一平面上にあるとき、平行六面体の体積は 0 になる。また、$\det(A) = 0$ となるため、この場合成り立っている。今後 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が同一平面上にないと仮定する。

$\vec{a}_1$ の x 座標が 0 でないとする。もしそうなら $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が同一平面上にないため、$\vec{a}_2, \vec{a}_3$ のうち x 座標が 0 でないものが存在し、それと交換をする。次に、変形

$$\vec{a}_2 \mapsto \vec{a}_2 + r_1\vec{a}_1,\ \vec{a}_3 \mapsto \vec{a}_3 + r_2\vec{a}_1$$

によって $\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ の x 座標を 0 にすることができる。この操作で、底面と高さが変えないので平行六面体の体積を変えない。$\vec{a}_2$ の y 座標が 0 ではないとする。もし $\vec{a}_2$ の y 座標が 0 とすると $\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ を交換させて y 座標が 0 でないものを実現すればよい。もし実現できないとすると $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ は平行となり $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が同一平面上にあることになる。次に、同様の変形を

$$\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_1 + s_1\vec{a}_2,\ \vec{a}_3 \mapsto \vec{a}_3 + s_2\vec{a}_2$$

とすることによって平行六面体の体積を変えずに $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ の y 座標を 0 にすることができる。$\vec{a}_3$ の z 座標は 0 ではない。なぜなら、もし 0 なら直前の変形前において、$\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ は平行であり、その時点で $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は同一平面上にあり矛盾する。このとき、変形

$$\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_1 + t_1\vec{a}_3,\ \vec{a}_2 \mapsto \vec{a}_2 + t_2\vec{a}_3$$

のように変形しても平行六面体の体積を変えない。これにより、

$$(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} = D$$

これにより、平行六面体は縦横高さが $|\alpha_1|, |\alpha_2|, |\alpha_3|$ の直方体であり体積は $|\alpha_1\alpha_2\alpha_3| = |\det(D)|$ であり、上記の変形が等積変形であったため、行列 A で作られる平行六面体の体積と一致する。また、上記のベクトルの変形によって行列式を変えないので、$\det(D) = \det(A)$ である。ゆえに $|\det(A)|$ は A のベクトルから作られる平行六面体の体積であることがわかる。