

# 数学リテラシー2

担当 丹下 基生 : 研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

## 第7,8回 ('22年6月21日)

平面の方程式  $\cdots n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) + n_3(z - a_3) = 0$  を平面の方程式という。ここで、 $(n_1, n_2, n_3)$  はこの平面の法線ベクトルという。

点と平面との距離  $\cdots (x_1, x_2, x_3)$  から平面  $ax + by + cz + d = 0$  への距離は

$$\frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

と計算できる。

直線を表す式  $\cdots (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(v_1, v_2, v_3)$  を点  $(a_1, a_2, a_3)$  を通り、方向ベクトル  $(v_1, v_2, v_3)$  をもつ直線を表す。

### 演習問題

以下の問題に答えよ。また、以下の問題の類題を各自作って解いてみよ。

#### 問題 1 [平面の方程式 1]

以下の3点を通る平面の方程式を求めよ。

(1)  $(1, 2, 0), (2, 0, -1), (3, 1, 1)$

(2)  $(1, 1, 1), (0, 1, -2), (2, 3, 3)$

#### 問題 2 [平面の方程式 2]

下のベクトル  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  のどちらにも平行となる平面のうち原点を通る平面の方程式を求めよ。

(1)  $\vec{v}_1 = (2 - 1, 2), \vec{v}_2 = (0, 1, 1)$

(2)  $\vec{v}_1 = (11, -3), \vec{v}_2 = (5, 3, 2)$

#### 問題 3 [点から平面までの距離]

点  $Q$  から平面  $P$  への距離を求めよ。

(1)  $P : 3x + 4y + z = 1, Q(1, 1, 1)$

(2)  $P : 5x - y - z = -1, Q(1, -1, -1)$

#### 問題 4 [点から平面までの距離]

上記問題において、 $Q$  から  $P$  へ下ろした垂線が  $P$  と交わる点を求めよ。

(この問題の学習には平面と直線との交点を学んでからでも良い。)

#### 問題 5 [直線の方程式 1]

次の点  $P, Q$  を通る直線の方程式をパラメータ  $t$  を用いて表せ。

(1)  $P(-1, 1, 0), Q(2, 1, -3)$

(2)  $P(0, 0, 1), Q(3, -5, -2)$

**問題 6** [直線の方程式 2]

次の平面  $P_1, P_2$  の交線として得られる直線の方向ベクトルを求めよ。

(1)  $P_1 : 2x + 3y + z - 1 = 0, P_2 : -x + 5y - 2z = 0$

(2)  $P_1 : x - 4y + 3z + 1 = 0, P_2 : x + y + z - 2 = 0$

**問題 7** [直線の方程式 3]

上の問題の平面  $P_1, P_2$  の交線として得られる直線をパラメータ  $t$  を用いて記述せよ。

**問題 8** [平面の方程式 3]

次の直線  $L$  と点  $P$  を含む平面を求めよ。

(1)  $L : (1, 0, 3) + t(1, 1, -5), P(1, 2, 3)$

(2)  $L : (-1, 2, 1) + t(8, 2, -3), P(2, 0, -1)$

**問題 9** [平面と直線の交点]

以下の問題を解け。

(1)  $\mathbb{R}^3$  の点  $P(1, 0, 2)$  を通り、方向ベクトル  $(2, 3, -1)$  を持つ直線  $l$  と平面  $H : 2x - y + 3z - 5 = 0$  の交点を求めよ。(問 5.4.1)

(2)  $\mathbb{R}^3$  の点  $P(2, 1, 1)$  を通り、方向ベクトル  $(1, 5, -3)$  を持つ直線  $l$  と平面  $H : x + 2y - z - 8 = 0$  の交点を求めよ。

**問題 10** [2つの直線の間の距離 1]

次の2つの直線  $l_1, l_2$  上の点  $P_1, P_2$  に対して、その間の距離  $\overline{P_1P_2}$  の最小を直線の間の距離という。以下の2直線において直線の間の距離を求めよ。

(1)  $l_1 : (1, 1, 1) + t(2, 3, 0), l_2 : (-1, 0, 3) + t(1, 1, -1)$

(2)  $l_1 : (1, 0, 2) + t(3, 5, 1), l_2 : (2, 1, 0) + t(4, 3, 0)$

**問題 11** [2つの直線の間の距離 2]

上記問題の2直線において直線の間の距離を与える  $P_1, P_2$  を求めよ。

**問題 12** [2つの直線の間の距離 3]

上記問題の最小を与える  $P_1, P_2$  を通る直線は  $l_1, l_2$  のどちらにも直交することを示せ。

**問題 13** [球と平面との交わり 1]

球面  $S(A, r)$  を中心  $A$  かつ半径が  $r$  の球とする。このとき、 $S(A, r)$  と平面  $H$  との交わりの円の半径を求めよ。

(1)  $A(1, 2, -1), r = 2, H : x - y + 2z + 5 = 0$

(2)  $A(0, 0, 0), r = 2, H : 2x + y + z - 3 = 0$

(3)  $A(1, 5, 3), r = 3, H : 3x - 2y - z - 1 = 0$

**問題 14** [球と平面との交わり 2]

上記問題の円の中心を求めよ。