数学リテラシー2

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第7,8回（'22年6月21日)

平面の方程式 $\cdots$ $n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)+n_3(z-a_3)=0$ を平面の方程式という。ここで、(n_1,n_2,n_3) はこの平面の**法線ベクトル**という。
点と平面との距離 $\cdots$ (x_1,x_2,x_3) から平面 $ax+by+cz+d=0$ への距離は

$$\frac{|ax_1+bx_2+cx_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

と計算できる。
直線を表す式 $\cdots$ $(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+t(v_1,v_2,v_3)$ を点 (a_1,a_2,a_3) を通り、方向ベクトル (v_1,v_2,v_3) をもつ直線を表す。

演習問題答え

以下の問題に答えよ．また、以下の問題の類題を各自作って解いてみよ。

問題 1 [平面の方程式 1]
以下の 3 点を通る平面の方程式を求めよ。

(1) $(1,2,0),(2,0,-1),(3,1,1)$

(2) $(1,1,1),(0,1,-2),(2,3,3)$

(答え)
(1) 3 点を $A(1,2,0),B(2,0,-1),C(3,1,1)$ とおく．

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

なので, その外積は

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

となる．従って, $\vec{n}=(-1,-1,1)^t$ とすれば, 求める平面は $\vec{n}$ を法線ベクトルに持つので,

$$-(x-1)-(y-2)+(z-0)=0\iff -x-y+z+3=0.$$

(2) 同様にすればよい: $6x-y-2z-3=0.$

問題 2 [平面の方程式 2]
下のベクトル $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ のどちらにも平行となる平面のうち原点を通る平面の方程式を求めよ。

(1) $\vec{v}_1=(2-1,2),\vec{v}_2=(0,1,1)$

(2) $\vec{v}_1 = (1, 1, -3), \vec{v}_2 = (5, 3, 2)$

(答え)
(1) ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ の外積は

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である．求める平面は原点を通るので,

$$-3x - 2y + 2z = 0.$$

(2) 同様にすればよい: $11x - 17y - 2z = 0$.

$\boxed{\text{問題 } 3}$ [点から平面までの距離]
点 Q から平面 P への距離を求めよ。

(1) $P : 3x + 4y + z = 1$, $Q(1, 1, 1)$

(2) $P : 5x - y - z = -1$, $Q(1, -1, -1)$

(答え)
公式に当てはめることで以下のように計算できる:
(1) $\dfrac{7}{\sqrt{26}}$, (2) $\dfrac{8}{3\sqrt{3}}$.

$\boxed{\text{問題 } 4}$ [点から平面までの距離]
上記問題において、Q から P へ下ろした垂線が P と交わる点を求めよ。
(この問題の学習には平面と直線との交点を学んでからでも良い。)
(答え)
(1) $(1, 1, 1)$ を通り、ベクトル $(3, 4, 1)$ に平行な直線は

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(3, 4, 1)$$

のように表される。この直線と平面との交点を求めることで、$t = -\dfrac{7}{26}$ と計算できる。よってこの交点は、$(\dfrac{5}{26}, -\dfrac{1}{13}, \dfrac{19}{26})$ となる。
(2) $(1, -1, -1)$ を通り、ベクトル $(5, -1, -1)$ に平行な直線は

$$(x, y, z) = (1, -1, -1) + t(5, -1, -1)$$

のように表される。この直線と平面との交点を求めることで、$t = -\dfrac{8}{27}$ と計算できる。よってこの交点は、$(-\dfrac{13}{27}, -\dfrac{19}{27}, -\dfrac{19}{27})$ となる。

$\boxed{\text{問題 } 5}$ [直線の方程式 1]
次の点 P, Q を通る直線の方程式をパラメータ t を用いて表せ。

(1) $P(-1, 1, 0)$, $Q(2, 1, -3)$

(2) $P(0, 0, 1)$, $Q(3, -5, -2)$

(答え)

(1) P の位置ベクトルが

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であって,

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

なので, 求める方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3t \\ 1 \\ -3t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(2) P の位置ベクトルが

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であって,

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

なので, 求める方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ -5t \\ 1-3t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

問題 6 [直線の方程式 2]

次の平面 P_1, P_2 の交線として得られる直線の方向ベクトルを求めよ。

(1) $P_1 : 2x+3y+z-1=0$，$P_2 : -x+5y-2z=0$

(2) $P_1 : x-4y+3z+1=0$，$P_2 : x+y+z-2=0$

(答え)

(1) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ とすると、P_1, P_2 の交線の方向ベクトルは $\vec{u}$, $\vec{v}$ のどちらにも垂直であるから、求めるベクトルは $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$ となる。

(2) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると、P_1, P_2 の交線の方向ベクトルは $\vec{u}$, $\vec{v}$ のどちらにも垂直であるから、求めるベクトルは $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ となる。

問題 7 [直線の方程式 3]
上の問題の平面 P_1, P_2 の交線として得られる直線をパラメータ t を用いて記述せよ。
(答え)
(1) $P_1 \cap P_2$ となる点を選ぶ。$x=0$ とすると、$3y+z-1=0$ かつ $5y-2z=0$ であるから、$y=\dfrac{2}{11}$ かつ $z=\dfrac{5}{11}$ となる。よって、P_1 と P_2 の交線のなす直線は $\left(0, \dfrac{2}{11}, \dfrac{5}{11}\right)+t(-11,3,13)$ となる。
(2) $P_1 \cap P_2$ となる点を選ぶ。$x=0$ とすると、$-4y+3z=-1$ かつ $y+z=2$ であるから、$y=1$ かつ $z=1$ となる。よって、P_1 と P_2 の交線のなす直線は $(0,1,1)+t(-7,2,5)$ となる。

問題 8 [平面の方程式 3]
次の直線 L と点 P を含む平面を求めよ。

(1) $L:(1,0,3)+t(1,1,-5)$，$P(1,2,3)$

(2) $L:(-1,2,1)+t(8,2,-3)$，$P(2,0,-1)$

(答え)
(1) $A(1,0,3)$ とおくと、求める平面は $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}=(0,1,0)$ と $(1,1,-5)$ に平行であるので、その法線ベクトルは $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}\times(1,1,-5)=(-5,0,-1)$ である。またこの平面は $(1,0,3)$ を通るので、$5x+3z-8=0$ である。
(2) $A(-1,2,1)$ とおくと、求める平面は $\overrightarrow{AP}=(3,-2,-2)$ と $(8,2,-3)$ に平行であるので、その法線ベクトルは $\overrightarrow{AP}\times(8,2,-3)=(10,-7,22)$ である。またこの平面は $(1,0,3)$ を通るので、$10x+7y-22z+56=0$ である。

問題 9 [平面と直線の交点]
以下の問題を解け。

(1) $\mathbb{R}^3$ の点 $P(1,0,2)$ を通り、方向ベクトル $(2,3,-1)$ を持つ直線 ℓ と平面 $H: 2x-y+3z-5=0$ の交点を求めよ。(問 5.4.1)

(2) $\mathbb{R}^3$ の点 $P(2,1,1)$ を通り、方向ベクトル $(1,5,-3)$ を持つ直線 ℓ と平面 $H: x+2y-z-8=0$ の交点を求めよ。

(答え)
(1) ℓ は $(x,y,z)=(1,0,2)+t(2,3,-1)$ とかける。この式を $2x-y+3z-5=0$ に代入して、$t=\dfrac{3}{2}$ を得る。よって、交点は $\left(4, \dfrac{9}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ となる。
(2) ℓ は $(x,y,z)=(2,1,1)+t(1,5,-3)$ とかける。この式を $x+2y-z-8=0$ に代入して、$t=\dfrac{13}{14}$ を得る。よって、交点は $\left(\dfrac{41}{25}, \dfrac{79}{14}, -\dfrac{25}{14}\right)$ となる。

問題 10 [2 つの直線の間の距離 1]
次の 2 つの直線 ℓ_1, ℓ_2 上の点 P_1, P_2 に対して、その間の距離 $\overline{P_1P_2}$ の最小を**直線の間の距離**という。以下の 2 直線において直線の間の距離を求めよ。

(1) $\ell_1:(1,1,1)+t(2,3,0)$，$\ell_2:(-1,0,3)+t(1,1,-1)$

(2) $\ell_1:(1,0,2)+t(3,5,1)$，$\ell_2:(2,1,0)+t(4,3,0)$

(答え)

(1) $(1+2t, 1+3t, 1)$ と $(-1+s, s, 3-s)$ との間の距離は、

$$\sqrt{(2t-s+2)^2+(3t-s+1)^2+(2-s)^2} = \sqrt{13t^2-(10s-14)t+3s^2-10s+9}$$

$$= \sqrt{13\left(t-\frac{5s-7}{13}\right)^2+\frac{14}{13}\left(s-\frac{15}{7}\right)^2+\frac{2}{7}}$$

よって、$13t-5s+7=0$ かつ $s=-\frac{11}{7}$ であるときこの距離は最小になる。そのとき $t=\frac{2}{7}$ かつ $s=\frac{15}{7}$ となる。よって $\sqrt{\frac{2}{7}}$ が距離が最小となる。

(2) $(1+3t, 5t, 2+t)$ と $(2+4s, 1+3s, 0)$ との間の距離は、

$$\sqrt{(3t-4s-1)^2+(5t-3s-1)^2+(t+2)^2} = \sqrt{35t^2-(54s+12)t+25s^2+14s+6}$$

$$= \sqrt{35\left(t-\frac{27s+6}{35}\right)^2+\frac{146}{35}\left(s+\frac{83}{146}\right)^2+\frac{529}{146}}$$

よって、$38t-27s-6=0$ かつ $s=-\frac{158}{221}$ であるときこの距離は最小になる。そのとき $t=-\frac{39}{146}$ かつ $s=-\frac{83}{146}$ となる。よって $\frac{23}{\sqrt{146}}$ が距離が最小となる。

$\boxed{\text{問題 11}}$ [2 つの直線の間の距離 2]

上記問題の 2 直線において直線の間の距離を与える P_1, P_2 を求めよ。

(答え)

(1) 問題 11(1) の答えの P_1 は $\left(\frac{11}{7}, \frac{13}{7}, 1\right)$ であり、P_2 は $\left(\frac{8}{7}, \frac{15}{7}, \frac{6}{7}\right)$ となる。

(2) 問題 11(2) の答えの P_1 は $\left(-\frac{46}{221}, -\frac{445}{221}, \frac{264}{221}\right)$ であり、P_2 は $\left(-\frac{190}{221}, -\frac{253}{221}, 0\right)$ となる。

$\boxed{\text{問題 12}}$ [2 つの直線の間の距離 3]

上記問題の最小を与える P_1, P_2 を通る直線は ℓ_1, ℓ_2 のどちらにも直交することを示せ。

(答え)

(1) $\overrightarrow{P_1P_2} = \left(-\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{1}{7}\right)$ であり、このベクトルは $(2,3,0)$, $(1,1,-1)$ と内積を取ることで直交していることがわかる。

(2) $\overrightarrow{P_1P_2} = \left(-\frac{144}{221}, \frac{192}{221}, -\frac{264}{221}\right)$ であり、このベクトルは $(3,5,1)$, $(4,3,0)$ と内積を取ることで直交していることがわかる。

$\boxed{\text{問題 13}}$ [球と平面との交わり 1]

球面 $S(A,r)$ を中心 A かつ半径が r の球とする。このとき、$S(A,r)$ と平面 H との交わりの円の半径を求めよ。

(1) $A(1,2,-1)$, $r=2$, $H: x-y+2z+5=0$

(2) $A(0,0,0)$, $r=2$, $H: 2x+y+z-3=0$

(3) $A(1,5,3)$, $r=3$, $H: 3x-2y-z-1=0$

(答え)

(1) A から H への距離は $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ であり、半径が 2 であるから交わりの円の半径は $\sqrt{4-\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{10}{3}}$

(2) A から H への距離は $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ であり、半径が 2 であるから交わりの円の半径は $\sqrt{4-\dfrac{3}{2}}=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

(3) A から H への距離は $\dfrac{11}{\sqrt{14}}$ であり、半径が 3 であるから交わりの円の半径は $\sqrt{9-\dfrac{121}{14}}=\sqrt{\dfrac{5}{14}}$

$\boxed{\text{問題 14}}$ [球と平面との交わり 2]

上記問題の円の中心を求めよ。

(答え)

(1) A を通り、H への垂線は、$(x,y,z)=(1,2,-1)+t(1,-1,2)$ であり、この直線と H との交点を求めることで、$t=-\dfrac{1}{3}$ であり、$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{7}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$ が求められる。

(2) A を通り、H への垂線は、$(x,y,z)=t(2,1,1)$ であり、この直線と H との交点を求めることで、$t=\dfrac{1}{2}$ であり、$\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ が求められる。

(3) A を通り、H への垂線は、$(x,y,z)=(1,5,3)+t(3,-2,-1)$ であり、この直線と H との交点を求めることで、$t=-\dfrac{11}{14}$ であり、$\left(\dfrac{47}{14},\dfrac{24}{7},\dfrac{31}{14}\right)$ が求められる。

(※) なお、上記の計算はもしかしたらどこかにミスを含む可能性があります。
もし発見しましたら上記メールアドレスにまで連絡をすること。