

数学リテラシー2

担当 丹下 基生 : 研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第9,10回 ('22年6月28日)

写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ とは 2 変数の実数値関数 $f(x, y)$ のことである. この 2 変数関数 f のグラフ Γ_f を

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

で定義する. 次の 2 変数関数は特別に **2 次形式** と呼ばれる:

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

演習問題

問題 1 [空間上の 3 点]

$A(1, 2, -1)$, $B(3, -1, 2)$, $C(2, 0, 1)$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) A, B, C を含む平面 H の方程式を求めよ.
- (2) 原点より平面 H への距離を求めよ.
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ.

問題 2 [平面と直線のなす角]

以下の問題を解け.

- (1) 平面 $H: 2x + y + z = 1$ と直線 $x = 2y + 1 = z - 1$ のなす角の \cos を求めよ.
- (2) 平面 $H: x + 2y + 3z = -1$ と直線 $2x = y - 2 = z + 1$ のなす角の \cos を求めよ.

問題 3 [直線への距離]

以下の問題を解け.

- (1) $A(1, 0, -1)$ から直線 $x = 2y - 1 = 5z - 1$ への距離を求めよ.
- (2) $A(2, 1, -3)$ から直線 $-x = y + 1 = 3z$ への距離を求めよ.

問題 4 [2 つの平面の間の距離]

次の 2 つの平行な平面 H_1, H_2 の間の距離を求めよ.

- (1) $H_1: 2x + y - z - 3 = 0$, $H_2: 2x + y - z - 7 = 0$
- (2) $H_1: x + 2y + z - 1 = 0$, $H_2: x + 2y + z + 1 = 0$

問題 5 [2つの直線の間の距離]

次の2つの直線の間の距離を求めよ。

(1) $\ell_1 : (2, 0, -1) + t(0, 1, -2)$ と $\ell_2 : (1, 1, 1) + t(1, 2, -1)$

(2) $\ell_1 : (-3, 1, 1) + t(2, 3, 4)$ と $\ell_2 : (0, 1, 1) + t(2, 1, 1)$

問題 6 [2つの球の共通の円]

球 S_1 を $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ とし、 S_2 を $x^2 + y^2 + 2y + z^2 - 4z - 11 = 0$ とする。このとき、以下の問題に答えよ。

(1) S_1 と S_2 の交わりを含む平面の方程式を求めよ。

(2) S_1 と S_2 の交わりの円の半径と中心を求めよ。

発展問題

問題 7 [2変数関数のグラフ]

2次形式

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

を考える。

(1) 対称行列を用いて $f(x, y)$ を表せ。

(2) 対称行列は直交行列で対角化できることを利用して、 f を交叉項の無い形に変換せよ。

(3) 上で得た実数固有値 λ_1, λ_2 を用いて、 f の最大値と最小値がどうなるか考察せよ。

問題 8 [2変数関数のグラフ]

次の2次形式のグラフはどのような形をしているか述べよ。

(1) $f(x, y) = x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2$.

(2) $f(x, y) = 5x^2 + 2xy + 5y^2$.