$\boxed{\text{数学リテラシー2}}$

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 9,10 回（'22 年 6 月 28 日）

写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ とは 2 変数の実数値関数 $f(x,y)$ のことである．この 2 変数関数 f の**グラフ** Γ_f を

$$\Gamma_f = \{(x,y,z) : (x,y) \in \mathbb{R}^2, z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

で定義する．次の 2 変数関数は特別に **2 次形式**と呼ばれる:

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

演習問題答え

$\boxed{\text{問題 1}}$ [空間上の 3 点]
$A(1,2,-1)$, $B(3,-1,2)$, $C(2,0,1)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) A,B,C を含む平面 H の方程式を求めよ。

(2) 原点より平面 H への距離を求めよ。

(3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

(答え) (1) $\overrightarrow{AB} = (2,-3,3)$, $\overrightarrow{AC} = (1,-2,2)$ であり、これらの法線ベクトルは $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0,-1,-1)$ であるから、A,B,C を通る平面の方程式は $-(y-2)-(z+1)=0$ つまり $y+z-1=0$ となる。
(2) 原点からの距離は $\dfrac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。
(3) 四面体 $OABC$ の体積は $\dfrac{1}{6}|\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}| = \dfrac{1}{6}$ と計算できる。

$\boxed{\text{問題 2}}$ [平面と直線のなす角]
以下の問題を解け。

(1) 平面 $H : 2x+y+z=1$ と直線 $x = 2y+1 = z-1$ のなす角の $\cos$ を求めよ。

(2) 平面 $H : x+2y+3z=-1$ と直線 $2x = y-2 = z+1$ のなす角の $\cos$ を求めよ。

(答え) (1) なす角を θ とする。$\cos\Big(\dfrac{\pi}{2}-\theta\Big) = \sin\theta = \dfrac{(2,1,1)\cdot(1,\frac{1}{2},1)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+1}} = \dfrac{\frac{7}{2}}{\sqrt{6}\cdot\frac{3}{2}} = \dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ よって、$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{54-49}}{3\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}}$
(2) なす角を θ とする。$\cos\Big(\dfrac{\pi}{2}-\theta\Big) = \sin\theta = \dfrac{(1,2,3)\cdot(\frac{1}{2},1,1)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{\frac{1}{2^2}+1+1}} = \dfrac{\frac{11}{2}}{\sqrt{14}\cdot\frac{3}{2}} = \dfrac{11}{3\sqrt{14}}$ よって、$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{126-121}}{3\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{14}}$

$\boxed{\text{問題 3}}$ [直線への距離]
以下の問題を解け。

(1) $A(1,0,-1)$ から直線 $x=2y-1=5z-1$ への距離を求めよ。

(2) $A(2,1,-3)$ から直線 $-x=y+1=3z$ への距離を求めよ。

(答え) (1) この直線をパラメータを用いて表示すると、$x=2y-1=5z-1=t$ とおくことで $\left(t,\dfrac{t+1}{2},\dfrac{t+1}{5}\right)$ であるから、A との距離は、$\sqrt{(t-1)^2+\left(\dfrac{t+1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{t+1}{5}+1\right)^2}=\dfrac{1}{10}\sqrt{129t^2-102t+269}$ $=\dfrac{1}{10}\sqrt{129\left(t-\dfrac{51}{129}\right)^2+\dfrac{107}{43}}$ となり、この 2 つの直線の距離は、$\dfrac{1}{10}\sqrt{\dfrac{107}{43}}$ となる。
(2) この直線の方向ベクトルは $(3,-3,-1)$ であり、このベクトルを法線ベクトルとし $(2,1,-3)$ を通る平面は $3x-3y-z-6=0$ であり、この平面と直線との交点を求めると、$\left(\dfrac{9}{19},-\dfrac{28}{19},-\dfrac{3}{19}\right)$ となる。この点と A との距離を求めると $\sqrt{\dfrac{314}{19}}$ となる。

$\boxed{\text{問題 4}}$ [2 つの平面の間の距離]
次の 2 つの平行な平面 H_1,H_2 の間の距離を求めよ。

(1) $H_1:2x+y-z-3=0$、$H_2:2x+y-z-7=0$

(2) $H_1:x+2y+z-1=0$、$H_2:x+2y+z+1=0$

(答え) (1) H_1 と H_2 との原点からの距離を求めると、$\dfrac{|-3|}{\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$ と $\dfrac{|-7|}{\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{7}{\sqrt{6}}$ となり、原点はこの 2 つの平面において、同じ側にいるので H_1 と H_2 の間の距離は、$\dfrac{7}{\sqrt{6}}-\dfrac{3}{\sqrt{6}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}$ となる。
(2) H_1 と H_2 との原点からの距離を求めると、$\dfrac{|-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ と $\dfrac{|1|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ となり、原点はこの 2 つの平面において、反対側にいるので H_1 と H_2 の間の距離は、$\dfrac{1}{\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ となる。

$\boxed{\text{問題 5}}$ [2 つの直線の間の距離]
次の 2 つの直線の間の距離を求めよ。

(1) $\ell_1:(2,0,-1)+t(0,1,-2)$ と $\ell_2:(1,1,1)+t(1,2,-1)$

(2) $\ell_1:(-3,1,1)+t(2,3,4)$ と $\ell_2:(0,1,1)+t(2,1,1)$

(答え) (1) $(0,1,-2)$ と $(1,2,-1)$ の両方に直交するベクトルは、$(3,-2,-1)$ であり、この方向ベクトルをもち、$(2,0,-1)$ と $(1,1,1)$ を通る 2 つの平面はそれぞれ、$3x-2y-z-7=0$ と $3x-2y-z=0$ である。これらの原点からの距離は $\dfrac{|-7|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{14}}=\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ と 0 であるから、この平面の間の距離は $\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ であり、この距離はこの 2 直線の間の距離にもなる。
(2) $(2,3,4)$ と $(2,1,1)$ の両方に直交するベクトルは、$(1,-6,4)$ であり、この方向ベクトルをもち、$(-3,1,1)$ と $(0,1,1)$ を通る 2 つの平面はそれぞれ、$x-6y+4z+5=0$ と $x-6y+4z+2=0$ である。これらの原点からの距離は $\dfrac{|5|}{\sqrt{1^2+6^2+4^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{53}}$ と $\dfrac{|2|}{\sqrt{1^2+6^2+4^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{53}}$ であり、この 2 つの平面は原点において同じ側にいるので、この 2 つの平面の間の距離は $\dfrac{3}{\sqrt{53}}$ であり、この距離はこの 2 直線の間の距離にもなる。

$\boxed{\text{問題 6}}$ [2 つの球の共通の円]
球 S_1 を $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$ とし、S_2 を $x^2+y^2+2y+z^2-4z-11=0$ とする。このとき、以下の問題に答えよ。

(1) S_1 と S_1 の交わりを含む平面の方程式を求めよ。

(2) S_1 と S_2 の交わりの円の半径と中心を求めよ。

(答え) (1) この 2 つの方程式を引くことによって、$-2x+2y-2z+16=0$ が得られる。よって求める方程式は $x-y+z-8=0$ である。
(2) この平面と S_1 との交わりを考えればよい。S_1 の中心は $(1,-2,3)$ であるからこの点と (1) で求めた平面との距離は $\dfrac{|1+2+3-8|}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ である。よって、S_1 の半径は 3 であるから求める円の半径は、$\sqrt{3^2-\dfrac{4}{3}} = \sqrt{\dfrac{23}{3}}$ となる。直線 $(1,-2,3)+t(1,-1,1)$ と平面 $x-y+z-8=0$ との交わりを求めると $\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{8}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$ となる。この点が S_1 と S_2 の交わりの円の中心である。

発展問題

$\boxed{\text{問題 7}}$ [2 変数関数のグラフ]
2 次形式

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

を考える.

(1) 対称行列を用いて $f(x,y)$ を表せ.

(2) 対称行列は直交行列で対角化できることを利用して, f を交叉項の無い形に変換せよ.

(3) 上で得た実数固有値 λ_1, λ_2 を用いて, f の最大値と最小値がどうなるか考察せよ.

(答え) 省略
$\boxed{\text{問題 8}}$ [2 変数関数のグラフ]

次の 2 次形式のグラフはどのような形をしているか述べよ.

(1) $f(x,y) = x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2$.

(2) $f(x,y) = 5x^2 + 2xy + 5y^2$.

(答え) 省略