

トポロジー B

担当 丹下 基生 : 研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第3回 ('25年10月15日 : Keywords ... 単体複体のホモロジーと公理)

(目標) ホモロジーを定義し、計算できるようにする。また、ホモロジーが何か理解するように努める。

3.1 単体複体のホモロジーとその意味

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

完全系列 ... $\text{Im } f = \text{Ker } g$ を満たす

チェイン複体 ... 完全ではないが $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ を満たし、完全系列の差をホモロジーという。

チェイン複体 $\rightsquigarrow$ 単体複体のホモロジー (第2回分プリント)

単体複体 $\rightsquigarrow$ チェイン複体 (今回)

単体複体からチェイン複体を作る。これにより、原理的に単体複体からホモロジーを計算できる。

定義 3.1. K を n 次元単体複体とする。 $0 \leq k \leq n$ とする。アーベル群 $C_k(K)$ を S_k を基底とする $\mathbb{Z}$ 自由加群つまり、 $C_k(K) = \mathbb{Z}\langle S_k \rangle$ を以下のように定める。このとき境界準同型 $\partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$ を $\sigma = \langle v_0 v_1 \cdots v_k \rangle \in S_k$ に対して

$$\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle v_0 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_n \rangle$$

と定義する。ここで、ハット記号 $\widehat{}$ は、その項を除く意味である。

注 3.2. S_0 の頂点に全順序がついており、それに従って、任意の k に対して、 $\sigma = \langle v_0 v_1 \cdots v_k \rangle \in S_k$ に対しても一斉に順番がついているとする。これにより、頂点に順序がついていることで、重複を避けている。例えば $\langle v_0 v_1 v_2 \rangle$ と $\langle v_0 v_2 v_1 \rangle$ は同じ単体であるため。上の境界準同型についてもうまく定義されている。また、下でも与えるように、 $\sigma \in C_k(K)$ は単体に向きを与えており、 $-\sigma \in C_k$ は σ にその逆の向きを与えたもの、つまり、 $\sigma = \langle v_0 v_1 v_2 \cdots v_k \rangle$ に対して $-\sigma = \langle v_1 v_0 v_2 \cdots v_k \rangle$ を与えたものとして考えられる。そもそも上の $\partial_k \sigma$ の定義も単体に向きを込めて考えたものと思える。

注 3.3. B を基底とする $\mathbb{Z}$ 自由加群とは、 B を基底とするベクトル空間で、係数を $\mathbb{Z}$ にしたようなものと考えればよい。

定理 3.4. $(C_*(K), \partial_*)$ はチェイン複体である。

Proof. $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ を証明すれば良い。 □

例 3.5. $\sigma \in S_1$ に対して $\sigma = \langle v_0 v_1 \rangle$ のとき、

$$\partial_1 \langle v_0 v_1 \rangle = \langle v_1 \rangle - \langle v_0 \rangle$$

であり、 $\sigma \in S_2$ に対して $\sigma = \langle v_0 v_1 v_2 \rangle$ のとき、

$$\partial_2 \langle v_0 v_1 v_2 \rangle = \langle v_1 v_2 \rangle - \langle v_0 v_2 \rangle + \langle v_0 v_1 \rangle$$

命題 3.6. このように ∂_k を定めた (C_k, ∂_k) はチェイン複体である。

演習 3.7. $\sigma \in S_3$ に対して $\sigma = \langle v_0 v_1 v_2 v_3 \rangle$ のとき、 $\partial_3 \sigma$ を定義に従って計算せよ。

命題 3.8 (公理 (D)). 1 点 $\{p\}$ のホモロジーは

$$H_k(\{p\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

のようになる。

問い 3.9. 単体複体 K に対して k 次サイクル $Z_k(K)$ また、 k 次バウンダリ $B_k(K)$ は何を意味するか？またその商群をとることで得られるホモロジー群 $H_k(K) = Z_k(K)/B_k(K)$ は単体複体 K の何を意味するか？

この問いについては必ず考えてみる。もし分からない場合は、以下の演習問題をとくことで、ホモロジーで何を計算しているか実感を持つこと。

演習 3.10. $K = \{\langle v_0 v_1 \rangle, \langle v_0 v_2 \rangle, \langle v_1 v_2 \rangle, \langle v_i \rangle \ (i = 0, 1, 2)\}$ のとき、 $k = 0, 1$ の時、 $Z_k(K)$ はどのような元で生成され、 $B_k(K)$ はどのような元で生成されるか？ K のホモロジーを計算せよ。

演習 3.11. $K = \{\langle v_0 v_1 \rangle, \langle v_0 v_2 \rangle, \langle v_1 v_2 \rangle, \langle v_2 v_3 \rangle, \langle v_0 v_3 \rangle, \langle v_i \rangle \ (i = 0, 1, 2, 3)\}$ のとき、 $k = 0, 1$ の時、 $Z_k(K)$ はどのような元で生成され、 $B_k(K)$ はどのような元で生成されるか？ K のホモロジーを計算せよ。

演習 3.12. $K = \{\langle v_0 v_1 \rangle, \langle v_0 v_2 \rangle, \langle v_1 v_2 \rangle, \langle v_2 v_3 \rangle, \langle v_0 v_3 \rangle, \langle v_i \rangle \ (i = 0, 1, 2, 3)\}$ のとき、 $k = 0$ の時、 $Z_k(K)$ はどのような元で生成され、 $B_k(K)$ はどのような元で生成されるか？ K のホモロジーを計算せよ。

演習 3.13. $K = \{\langle v_0v_1v_2 \rangle, \langle v_0v_1 \rangle, \langle v_0v_2 \rangle, \langle v_1v_2 \rangle, \langle v_2v_3 \rangle, \langle v_3v_4 \rangle, \langle v_2v_4 \rangle, \langle v_i \rangle (i = 0, 1, 2, 3, 4)\}$ とする。 $k = 0, 1, 2$ の時、 $Z_k(K)$ はどのような元で生成され、 $B_k(K)$ はどのような元で生成されるか？ K のホモロジーを計算せよ。

演習 3.14. 単体複体 K で、 $H_0(K) = \mathbb{Z}$, $H_1(K) = \mathbb{Z}^3$, $H_2(K) = \mathbb{Z}$, $H_i(K) = 0 (i \geq 3)$ を満たす例を与えよ。

3.2 ホモロジー公理 (F)

連続写像 $f: K \rightarrow L$ に対してホモロジーに準同型写像が誘導するが、ここでは、単体写像 $f: K \rightarrow L$ の場合に示しておく。一般には単体近似定理を用いて示す必要がある。

補題 3.15. 単体写像 $f: K \rightarrow L$ に対して、その実現に連続写像 $|f|: |K| \rightarrow |L|$ を誘導する。

Proof. K, L を $\mathbb{R}^N$ と $\mathbb{R}^M$ に実現しておく。 $\sigma = \langle v_0v_1 \cdots v_n \rangle \in K$ に対して、 $x = t_0v_0 + \cdots + t_nv_n \in |\sigma| \subset K$ に対して $|f|(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(|v_i|)$ として定義する。この写像は $x \in \sigma$ となる単体 σ に依存しないので well-defined であり、また属する単体上で一次式であり、 $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ に対して、 $\sigma_1 \cap \sigma_2 \in K$ に対してその制限は同じ 1 次式であるから、全体として連続である。 $\square$

$j_0, j_1, \dots, j_n$ を $i_0, i_1, \dots, i_n$ の置換とする。

$$\langle v_{j_0} \cdots v_{j_n} \rangle = \text{sgn} \begin{pmatrix} i_0 & i_1 & \cdots & i_n \\ j_0 & j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \langle v_{i_0} \cdots v_{i_n} \rangle$$

と定義する。これは、単体に向きがついていると解釈することができる。例えば、 $\langle v_0v_1 \rangle$ は v_0 から v_1 への向きを込めて考えることで、 $\langle v_1v_0 \rangle = -\langle v_0v_1 \rangle$ は v_1 から v_0 への向きの入った 1-単体 $\langle v_0v_1 \rangle$ と解釈する。

単体写像 $f: K \rightarrow L$ の頂点上の写像を $f_0: K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ とすると、

$$f(\langle v_0v_1 \cdots v_n \rangle) = \begin{cases} \langle f_0(v_0) \cdots f_0(v_n) \rangle & \forall i \neq j \text{ なら } f_0(v_i) \neq f_0(v_j) \\ 0 & \text{ある } i \neq j \text{ に対して } f_0(v_i) = f_0(v_j) \end{cases}$$

として定義し、それを線形に拡張することで、 $f_*: H_n(K) \rightarrow H_n(L)$ が得られる。

定理 3.16. 単体写像 $f: K \rightarrow L$ に対して、準同型写像 $f_*: H_k(K) \rightarrow H_k(L)$ が誘導する。

Proof. まず線形に $C_n(K) \rightarrow C_n(L)$ に拡張することはわかる。ホモロジーに準同型を誘導することを示す。そのために、 f_* がチェイン写像であること $\partial_k^L f_k = f_{k-1} \partial_k^K$ を示せばよい。

(I) $i \neq j \implies f_0(v_i) \neq f_0(v_j)$ の場合
と、

(II) ある $i \neq j \implies f_0(v_i) = f_0(v_j)$ の場合
に分けて示せばよい。 □

定理 3.17 (共変関手性). 単体写像 $f : K \rightarrow L$, $g : L \rightarrow M$ に対して、 $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ が成り立つ。

Proof. □

単体複体の上の恒等写像 $\text{id} : K \rightarrow K$ がホモロジーに恒等写像を誘導することは定義から明らかである。

3.3 ホモロジー公理 (P)

定義 3.18. 単体複体 K に対してその部分集合 $L \subset K$ が再び単体複体であるとき、 L を K の部分複体という。 (K, L) を単体複体の対という。

命題 3.19. (K, L) が単体複体の対であるとき、 $C_k(L) \subset C_k(K)$ が部分チェイン複体である。

定義 3.20. 単体複体の対 (K, L) に対するチェイン複体を自由加群として $C_k(K, L) = C_k(K)/C_k(L)$ とし、境界準同型 ∂_* を $C_k(K)$ が商群に誘導する写像として定義する。

$$0 \longrightarrow C_k(L) \longrightarrow C_k(K) \longrightarrow C_k(K, L) \longrightarrow 0$$

は短完全系列をなす。

注 3.21. 一般に自由加群の部分加群は自由加群であるが、自由加群の部分自由加群による商群は自由加群とは限らない。例えば、 $2\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ はどちらも自由加群だが、その商加群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は自由ではない。 $C_k(L) < C_k(K)$ は $C_k(K)$ の基底の一部を用いた部分自由加群であるため、その商加群も自由加群となる。

一般にチェイン複体の短完全系列があれば、次のヘビの補題が成り立つ。

補題 3.22 (ヘビの補題). チェイン複体 $(A_k, \partial_*^A)_{k \in \mathbb{Z}}$, $(B_k, \partial_*^B)_{k \in \mathbb{Z}}$, $(C_k, \partial_*^C)_{k \in \mathbb{Z}}$ の間に短完全系列

$$0 \longrightarrow A_k \xrightarrow{f_k} B_k \xrightarrow{g_k} C_k \longrightarrow 0$$

があるとする。これは、 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ はチェイン複体の間の準同型写像であることであり、つまり、可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_k & \xrightarrow{f_k} & B_k & \xrightarrow{g_k} & C_k & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial_k^A & & \downarrow \partial_k^B & & \downarrow \partial_k^C & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{k-1} & \xrightarrow{f_{k-1}} & B_{k-1} & \xrightarrow{g_{k-1}} & C_{k-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

が成り立つことを意味する。このとき、ある準同型写像 $\partial_k : H_k(C) \rightarrow H_{k-1}(A)$ が存在して、次の長完全系列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow H_k(A) \xrightarrow{f_{k,*}} H_k(B) \xrightarrow{g_{k,*}} H_k(C) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(A) \xrightarrow{f_{k-1,*}} H_{k-1}(B) \longrightarrow \cdots$$

$[x] \in H_k(C)$ に対して、 $[x] \mapsto \partial_k[x]$ を

$$[x] \mapsto [f_{k-1}^{-1}(\partial_k^B x)] \in H_{k-1}(A)$$

として定義する。この写像の族 $\{\partial_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ を連結準同型という。

演習 3.23. ∂_k が x の取り方に依らずに決まることを示せ。

このことから、単体複体の対 (K, L) に対して、ホモロジーの公理 (P) の前半が成り立つことがわかる。公理 (P) の後半についても同様に成り立つ。

演習 3.24. 1 単体 σ^1 を表す単体複体を K とし、その境界 $\partial\sigma^1$ を表す単体を L とする。このとき、ホモロジー $H_*(K, L)$ を計算せよ。

演習 3.25. 3 単体 σ^3 に対して、その境界 $\partial\sigma^3$ に対して、その 2 次元面の一つを τ^2 とする。 $\partial\sigma^3, \tau^2$ を単体複体として、 K, L とする。このとき、ホモロジー $H_*(K, L)$ を計算せよ。