

第4回 ('25年10月22日 : Keywords ... 単体複体のホモロジーと胞体複体)

(目標) 先週定義した単体複体のホモロジーの計算に習熟する。

単体複体のホモロジーを一般化し、胞体複体の定義を行う。

4.1 単体複体のホモロジーの計算例

例 4.1. $\partial\sigma^2$ のホモロジーを計算する。その単体複体を K とする。頂点を v_0, v_1, v_2 とする。また、これは S^1 の単体分割でもあり、 S^1 のホモロジーを計算することにも相当する。

$$(1) C_0(K) = \mathbb{Z}\langle v_0 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle v_1 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle v_2 \rangle, C_1(K) = \mathbb{Z}\langle v_0v_1 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle v_1v_2 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle v_0v_2 \rangle, \\ C_i(K) = 0 \text{ for } i \geq 2$$

$$(2) \partial_i = 0 \text{ } i \neq 2 \text{ であり、} i \geq 2 \text{ において } H_i(K) = 0$$

$$(3) \partial_1\langle v_0v_1 \rangle = \langle v_1 \rangle - \langle v_0 \rangle, \partial_1\langle v_1v_2 \rangle = \langle v_2 \rangle - \langle v_1 \rangle, \partial_1\langle v_0v_2 \rangle = \langle v_2 \rangle - \langle v_0 \rangle \quad \partial_1 \text{ の} \\ \text{表現行列とその簡約化は}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。 $Z_1(K) = \text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}\langle -\langle v_0v_1 \rangle - \langle v_1v_2 \rangle + \langle v_0v_2 \rangle \rangle$, $B_0 = \mathbb{Z}\langle \langle v_1 \rangle - \langle v_0 \rangle \rangle + \mathbb{Z}\langle \langle v_2 \rangle - \langle v_1 \rangle \rangle$ よって $H_1(K) = H_0(K) = \mathbb{Z}$ でそれ以外のホモロジー群は 0 と計算できる。

演習 4.2. 図 1,2 の示す平面上の単体分割のホモロジーを求めよ。

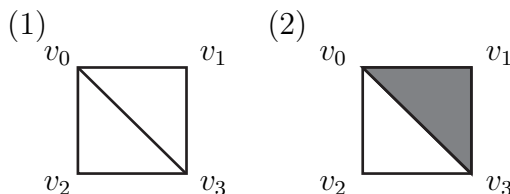


図 1: 単体分割

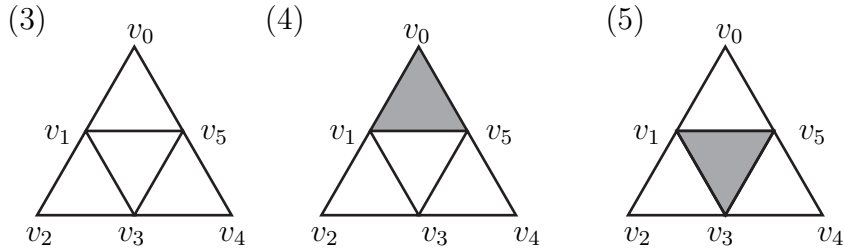


図 2: 単体分割

演習 4.3. 図 3 の (1) の頂点の対応 $v_i \mapsto v_i$ が示す単体写像を f とするとき、 $f_* : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ は同型を誘導することを示せ。(2) で一般に単体複体 K において K の 1-単体とその両端の 0-単体を共有する 2-単体 σ との和集合を $L = K \cup \sigma$ とする。この時、同様に得られる単体写像 $f : K \rightarrow L$ は同型 $H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ を導くことを示せ。

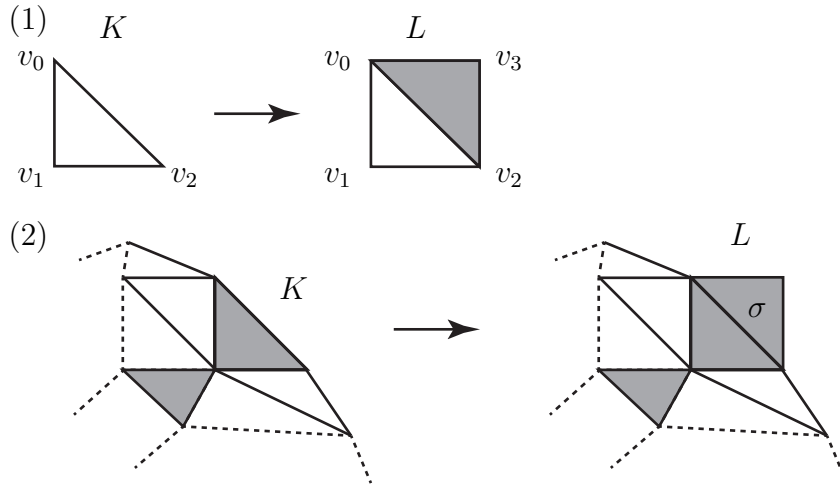


図 3: 単体写像 $f : K \rightarrow L$

注 4.4. 上の演習に加えてふた続きの 1-単体と σ^2 の 2 つの 1-単体をくっつけたものもホモロジーに同型を導く。

このように、単体複体をできるだけ簡単な単体複体に変形することで効率よく単体複体のホモロジーを計算することができる。

4.2 接着および胞体複体の定義

一般に、空間に空間を接着させることを考える。

定義 4.5. 空間対 (X, A) と空間 Y に対して、連続写像 $\varphi : A \rightarrow Y$ をとる。同値関係 $\sim$ を $x \in A$ に対して $x \sim \varphi(x)$ とし、それ以外の点では同一視しないこととして自然な射影 $\pi : X \sqcup Y \rightarrow X \sqcup Y / \sim =: Z$ を与え、 Z をその商位相空間とする。この Z のことを φ で貼り合わせて得られる空間といい、 Z を $Y \cup_{\varphi} X$ と書き、 φ をその貼り合わせ写像という。

貼り合わせて得られる空間 Z において、 $\pi|_Y : Y \hookrightarrow Z$ は単射であり、 Y は Z において像に同相である。同様に $X \setminus A \rightarrow Z$ も単射であり、像に同相である。

いま扱っている空間は素性のよい空間である。特にハウスドルフ性は成り立っていて欲しい。しかし、一般にハウスドルフ空間を連続写像で貼り合わせて得られる空間はハウスドルフとは限らない。ここで貼り合わせる方法を限定的にする必要がある。また、その時必ずハウスドルフ性を確約できる。

補題 4.6. X, Y をハウスドルフとし、 $A \subset X$ をコンパクトとする。もし、 $A \subset X$ に対して、 $A \subset U$ となる X のある開集合が存在し、 U は A のレトラクトであるとする。つまり、連続写像 $r : U \rightarrow A$ が存在し、 $r|_A = \text{id}_A$ であるものが存在することである。このとき、 φ によって貼り合わせて得られる空間 $Y \cup_\varphi X$ はハウスドルフである。

Proof. $z_1, z_2 \in Y \subset Z$ をとるとする。持ち上げ $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in Y$ に対して、 $\hat{z}_1 \in V_1, \hat{z}_2 \in V_2$ が Y 上で存在して、 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ となる。ここで、 $r^{-1}\varphi^{-1}(V_1) \sqcup V_1$ は $X \sqcup Y$ で開集合であり、 $B_i = \pi(r^{-1}\varphi^{-1}(V_i) \sqcup V_i) \subset Z$ とすると、 π は商写像であり、 $\pi^{-1}(B_i) = r^{-1}\varphi^{-1}(V_i) \sqcup V_i$ であり、 $r^{-1}\varphi^{-1}(V_1) \sqcup V_1$ は開集合であるから $B_i \subset Z$ は開集合である。 $z_i \in B_i$ かつ $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ である。他の場合も同様である。 $\square$

例 4.7. $Y = \{p\}$ とし、 $c_p : A \rightarrow \{p\}$ とし、 $\{p\} \cup_{c_p} X = X/A$ である。 X/A は位相空間 X において $A \subset X$ を 1 点につぶして得られる商空間である。

命題 4.8. 空間対 (X, A) に対して、 A を閉集合とし、 $A \subset U$ となる開集合があり、ホモトピー $F_t : X \rightarrow X$ で、 $F_t(U) \subset U$ で、 $F_t|_A = \text{id}_A$, $F_0 = \text{id}_X$, $F_1(U) \subset A$ となるものが存在するとする。連続写像 $\varphi : A \rightarrow Y$ によって貼り合わせて得られる空間 $Y \cup_\varphi X$ に対して同型写像

$$H_*(X, A) \cong H_*(Y \cup_\varphi X, Y)$$

が成り立つ。

これはホモロジーの公理から成り立つ。

例 4.9. 空間 Y に閉円盤 (D^n, S^{n-1}) を $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X$ を用いて貼り合わせたとき、 (D^n, S^{n-1}) において、 $S^{n-1} \subset U$ となる開集合で、ホモトピーで S^{n-1} にレトラクトするものが存在するので

$$H_k(Y \cup_\varphi D^n, Y) \cong H_k(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

が成り立つ。

ここで有限胞体複体を定義する。

定義 4.10. $X^{(0)}$ を有限個の点集合 (離散位相) とする。 $X^{(n-1)}$ まで定まったとして、 k_n 個の n 次元円盤 $D_1^n, \dots, D_{k_n}^n$ に対して、連続写像 $\varphi_i^{(n)} : \partial D_i^n \rightarrow X^{(n-1)}$ が存在して、 $X^{(n)} = X^{(n-1)} \cup_{\varphi_i^n} \sqcup_{i=1}^{k_n} D_i^n$ として定義する。この開円盤 $\overset{\circ}{D}_i^n$ の像を e_i^n とかき、胞体という。

位相空間 X がこのようにして $X^{(n)}$ に同相であるとき、 X を胞体複体といい、その分割を

$$X = \cup_{i=0}^n \cup_{j=1}^{k_i} e_j^i$$

とかいて X の胞体分割という。

例 4.11. 例えば S^1 は e^0 と e^1 の和によって胞体分割されているつまり $S^1 = e^0 \cup e^1$ となる。 S^2 は e^0 と e^2 の和によって胞体分割されている。つまり $S^2 = e^0 \cup e^2$ となる。

宿題演習 3.24, 演習 4.2(4,5), 演習 4.3(2) を解答せよ。