

第5回 ('25年10月29日：Keywords・・・単体複体のホモロジーと胞体複体)

(目標) 単体複体のホモロジーの計算の詳細を述べる。

胞体複体のホモロジーを定義を行う。

5.1 単体複体のホモロジーの計算例の詳細

例えば、3単体 σ^3 の境界となる単体複体 $K = \partial\sigma^3$ のホモロジーを計算する。 K に含まれる全ての単体を $0, 1, 2, 3, 01, 02, 03, 12, 13, 23, 123, 023, 013, 012$ の順に単体を並べる。このとき、 $\langle v_i v_j \rangle = \langle ij \rangle$ や $\langle v_i \rangle = \langle i \rangle$ と略す。つまり $C_0(K) = \mathbb{Z}^4$, $C_1(K) = \mathbb{Z}^6$, $C_2(K) = \mathbb{Z}^4$ であるから、チェイン複体を考えると、

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z}^4 \xleftarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^6 \xleftarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^4 \longleftarrow 0$$

となる。境界準同型は、具体的には $\partial_1 \langle ij \rangle = \langle j \rangle - \langle i \rangle$ や $\partial_2 \langle ijk \rangle = \langle jk \rangle - \langle ik \rangle + \langle ij \rangle$ などである。これらの基底を使って表現行列を考えると $\partial_1 \in M(4, 6, \mathbb{Z})$, $\partial_2 \in M(6, 4, \mathbb{Z})$ の同一視をもち、この行列の簡約化を考える必要がある。それらを ∂_1, ∂_2 の表現行列は下のようになる。

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \partial_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、それぞれ列の基本変形を使って

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots (*), \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots (**)$$

と簡約化される。行列 $A_1 = (*)$ を用いて

$$\begin{aligned} H_0(K) &= C_0(K)/B_0(K) = \mathbb{Z}\{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle\} / (\langle 0 \rangle - \langle 3 \rangle, \langle 1 \rangle - \langle 3 \rangle, \langle 2 \rangle - \langle 3 \rangle) \\ &\cong \mathbb{Z}\langle 3 \rangle \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

同値類において、 $\langle 0 \rangle \sim \langle 1 \rangle \sim \langle 2 \rangle \sim \langle 3 \rangle$ であるからどの頂点を取っても H_0 の生成元となる。一般に、連結な単体複体 K において、任意の点 $p \in K^{(0)}$ に対しても $\langle p \rangle$ が $H_0(K)$ の直和成分となり、 $\langle p \rangle \in K^{(0)}$ の取り方によらない。(定理 2.10 を参照せよ。)

また、 $\text{Ker } \partial_1$ を求めるために ∂_1, ∂_2 の表現行列を行の基本変形を用いて簡約化して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots (*_3), \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots (*_4)$$

となる。行列 $A_3 = (*_3)$ に対して、 $A\mathbf{x} = 0$ を満たす $\mathbf{x} = {}^t(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$ とすると、 $c_1 = c_4 + c_5$, $c_2 = -c_4 + c_6$, $c_3 = -c_5 - c_6$ であり、

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} = c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_4 \mathbf{v}_1 + c_5 \mathbf{v}_2 + c_6 \mathbf{v}_3$$

となる。 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は一次独立である。これを元の基底を使って書き直すと

$$\begin{aligned} Z_1(K) &= \text{Ker}(\partial_1) \\ &= \mathbb{Z}(\langle 01 \rangle - \langle 02 \rangle + \langle 12 \rangle) \oplus \mathbb{Z}(\langle 01 \rangle - \langle 03 \rangle + \langle 13 \rangle) \oplus \mathbb{Z}(\langle 02 \rangle - \langle 03 \rangle + \langle 23 \rangle) \end{aligned}$$

となる。ここで $\text{Ker}(\partial_1)$ の生成元を、 $\langle ij \rangle = -\langle ji \rangle$ の関係を使って書き直すと、

$$\langle 01 \rangle + \langle 12 \rangle + \langle 20 \rangle, \langle 01 \rangle + \langle 13 \rangle + \langle 30 \rangle, \langle 02 \rangle + \langle 23 \rangle + \langle 30 \rangle$$

のように、 $\partial\sigma^3$ の同じ点に戻ってくるサイクルになっている。このサイクルを $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ とする。 $\gamma_i \in \text{Ker}(\partial_1)$ の生成元である。これ以外にもサイクルとして、0 を通らないものとして $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ もあり、サイクルになっているが、 $\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3$ として表せることを注意しよう。他にも $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ とかもサイクル

であるが、これは、 $\langle 01 \rangle$ と $\langle 10 \rangle$ があるため相殺して、結局、同じ $\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3$ となる。 $\partial\sigma^3$ のサイクルはいつもこの3つの生成元の一次結合で表される。

では次を解いてみよう。

演習 5.1. $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ は $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を用いてどのように表せるか？

$B_1(K)$ は ∂_2 の列基本変形を使って表された $(**)$ を用いる。つまり、

$$\begin{aligned} B_1(K) &= \mathbb{Z}(\langle 01 \rangle - \langle 03 \rangle + \langle 13 \rangle) + \mathbb{Z}(\langle 02 \rangle - \langle 03 \rangle + \langle 23 \rangle) + \mathbb{Z}(\langle 12 \rangle - \langle 13 \rangle + \langle 23 \rangle) \\ &= \mathbb{Z}\gamma_2 + \mathbb{Z}\gamma_3 + \mathbb{Z}(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3) \end{aligned}$$

となる。ここで1次ホモロジーを計算すると、

$$f : \mathbb{Z}\gamma_2 + \mathbb{Z}\gamma_3 + \mathbb{Z}(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3) \rightarrow \mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\gamma_2 \oplus \mathbb{Z}\gamma_3$$

を恒等写像から来るものとする、恒等写像の制限であるから単射が成り立つ。全射性について議論する。 γ_2, γ_3 には直接 f の像であることは明らか。また、 $\gamma_1 = \gamma_2 - \gamma_3 + (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3)$ とかけるから、 γ_1 は f の像になっている。故に、 f は同型写像である。ゆえに $\mathbb{Z}\gamma_2 + \mathbb{Z}\gamma_3 + \mathbb{Z}(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3) = \mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\gamma_2 \oplus \mathbb{Z}\gamma_3$ これは $Z_1(K) = B_1(K)$ を意味するから

$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = Z_1(K)/Z_1(K) = 0$$

がわかる。

次に $\text{Ker}(\partial_2)$ を求めよう。 $H_2(K) = \text{Ker}(\partial_2)$ であることに注意する。 $A_4 = (*_4)$ とし、 $A_4 \mathbf{x} = 0$ となる元を $\mathbf{x} = {}^t(c_1, c_2, c_3, c_4)$ とすると、 $c_1 = -c_4, c_2 = c_4, c_3 = -c_4$ であるから

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = c_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_4 \mathbf{w}$$

$\mathbf{w}$ を $C_2(K)$ の元として表せば、 $-\langle 123 \rangle + \langle 023 \rangle - \langle 013 \rangle + \langle 012 \rangle$ となる。この元は non-zero であり、書き直せば、

$$\langle 132 \rangle + \langle 023 \rangle + \langle 031 \rangle + \langle 012 \rangle$$

となり、これは $\partial\sigma^3$ の表面の4つの面であり、端のないサイクルとなっている。これらの境界は

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$$

であり逆向きの矢印がちょうどペアになっていることがわかる。例えば、 $1 \rightarrow 3$ と $3 \rightarrow 1$ が1つずつあって、相殺する。これ続けると全て逆向きになったペアを作ることができる。これが端がないことの理由である。

よって、 $H_2(K) = \text{Ker}(\partial_2) = \mathbb{Z}(-\langle 123 \rangle + \langle 023 \rangle - \langle 013 \rangle + \langle 012 \rangle) \cong \mathbb{Z}$ が成り立つ。まとめると、

$$H_n(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, 2 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

となる。

結論：単体複体からホモロジーを計算するのは大変である。

5.2 (D^n, S^{n-1}) 及び S^n のホモロジー

ホモロジーの公理を用いることで (D^n, S^{n-1}) 及び S^n のホモロジーを求めてみる。

補題 5.2 $((D^n, S^{n-1})$ のホモロジー).

$$H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

が成り立つ。

Proof. $H_n(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$ であることに注意する。空間の非交和のホモロジーはホモロジーの直和になる。

(D^1, S^0) のホモロジーについて求める。空間対のホモロジーを求めることで、 D^1 は可縮 (1 点にホモトピー同値) であるから $\{p\}$ のホモロジーと同型であることから、空間対のホモロジーの完全系列から、 $k \geq 2$ について $H_k(D^1, S^0) \cong 0$ である。

可縮な空間 X において、同型写像による像は定値写像 $c_x : \{p\} \rightarrow X$ ($p \mapsto x$) による $1 \in H_0(\{p\}) = \mathbb{Z}\langle p \rangle$ の像として定義する。つまり誘導する同型写像 $H_0(\{p\}) \rightarrow H_0(X)$ の $\langle p \rangle$ の像として $H_0(X)$ の生成元を $\langle x \rangle$ と定める。

よって、例 2.11 のすぐ上に書いたことも考慮すれば、包含写像 $S^0 \rightarrow D^1$ が誘導する写像 $H_0(S^0) \cong \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{i_*} H_0(D^1) \cong \mathbb{Z}$ は、 $(n_1, n_2) \mapsto n_1 + n_2$ である。

よって長完全系列

$$0 \longrightarrow H_1(D^1, S^0) \longrightarrow H_0(S^0) \xrightarrow{i_*} H_0(D^1) \xrightarrow{j_*} H_0(D^1, S^0) \longrightarrow 0$$

から、 $H_1(D^1, S^0) = \text{Ker}(i_*) \cong \mathbb{Z}$ であり、 i_* は全射なので $H_0(D^1, S^0) \cong 0$ となる。

ここで、 $H_1(D^1, S^0)$ の生成元は、連結準同型 ∂_* で、 $(1, -1) \in \mathbb{Z}^2$ に移るものである。それを $[D^1, S^0]$ とする。つまり、 $\partial_*[D^1, S^0] = (1, -1)$ となる。

S^1 のホモロジーを求める。空間対 (S^1, S_-^1) のホモロジーを計算する。切除公理から $H_k(S^1, S_0^1) \cong H_k(D^1, S^0)$ であるから、これまでの計算で分かった部分を埋めると、

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{i_*} & H_2(S^1) & \xrightarrow{j_*} & 0 \\ \xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_1(S^1) & \xrightarrow{j_*} & \mathbb{Z} \\ \xrightarrow{\partial_*} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^1) & \xrightarrow{j_*} & 0 \end{array}$$

であり、 $k \geq 2$ について $H_k(S^1)$ となる。連結準同型 $\partial_* : H_1(S^1, S_-^1) \rightarrow H_0(S_-^1)$ の写像を決める。ここで、空間対 $(S_+^1, \partial S_+^1)$ の長完全系列と埋め込みが与える連続写像 $(S_+^1, \partial S_+^1) \rightarrow (S^1, S_-^1)$ のなす長完全系列の準同型を用いることで可換図式

$$\begin{array}{ccccc} H_1(S_+^1, \partial S_+^1) & \longrightarrow & H_0(\partial S_+^1) & & \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ \downarrow & & \downarrow & \rightsquigarrow & \downarrow \quad \downarrow \\ H_1(S^1, S_-^1) & \longrightarrow & H_0(S_-^1) & & \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \end{array}$$

がえられる。上段は $m \mapsto (m, -m)$ であり、右列は $(m, n) \mapsto m + n$ であり、左列は切除公理から同型である。つまり $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ は $1 \mapsto \pm 1$ となる。この合成が 0 写像であるから、可換性から ∂_* はゼロ写像である。つまり (S^1, S_-^1) の長完全系列は $0 \rightarrow H_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ と $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_0(S^1) \rightarrow 0$ の 2 つに分かれて、結果的に、

$$H_k(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 1 \\ 0 & k \neq 0, 1 \end{cases} \text{ となる。}$$

$\mathbb{Z} = H_0(\{p\}) \rightarrow H_0(S_-^1) \rightarrow H_0(S^1)$ は全て同型写像を誘導し、 $x \in S_-^1$ に対して $\langle x \rangle \in H_0(S_-^1)$ が生成元であったが、この包含によって同型写像を誘導するので、 $y \in S^1$ に対して定値な連続写像 $c_y : \{p\} \rightarrow S^1$ が誘導する写像 $\mathbb{Z} \rightarrow H_0(S^1)$ は同型写像を誘導し、その対する $H_0(S^1)$ の元を $\langle y \rangle$ とする。つまり $H_0(S^1) = \mathbb{Z}\langle y \rangle$ である。また、 $H_1(S^1)$ の生成元を $[S^1]$ とすると、 $j_*([S^1]) = [S^1, S_-^1]$ として一意に定まる。

$n \geq 2$ のとき帰納的に (D^n, S^{n-1}) のホモロジー群を計算すると $H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$ であり、 $H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n \\ 0 & k \neq 0, n \end{cases}$ が成り立つ。□

ここで、最後に以下の演習を挙げておく。

演習 5.3. $n = 2$ の場合に同様にして (D^2, S^1) と S^2 のホモロジーを求めよ。

演習 5.4. $n = 3$ の場合に同様にして (D^3, S^2) と S^3 のホモロジーを求めよ。

5.3 胞体複体のホモロジー

前回のプリントにおいて、胞体とは $X^{(0)}$ を有限個の頂点の集合であり、 $X^{(n-1)}$ が定まったとき、 $i = 1, \dots, k_n$ に対して連続写像 $\partial D_i^n \rightarrow X^{(n-1)}$ を定め、その和集合 $X^{(n-1)} \cup_{\varphi_i^n} \sqcup_{i=1}^{k_n} D_i^n$ を $X^{(n)}$ として定義するものだった。 $e_i^n = \varphi_i^n(\dot{D}_i^n)$ として胞体を定義すると、 $X^{(n)}$ はいくつかの胞体の和集合となる。このような $X^{(n)}$ を胞体複体というのだった。胞体複体 X に対して $X^{(n)}$ のことも同様に、 X の n 骨格という。 $X^{(0)}$ の点のことを頂点といい、 $(X^{(1)}, X^{(0)})$ のことを辺という。

単体分割は胞体分割の特殊な場合であると考えられる。特に上の連続写像が同相の場合に相当する。

$$\{\text{胞体分割できる空間}\} \supset \{\text{単体分割できる空間}\}$$

(目標設定)

ホモロジーが単体複体においてどのような量を計算していたかを念頭に、胞体複体のホモロジーをもう一度公理から設定し直すことで胞体複体のホモロジーは何を計算すれば良いかを考える。

それにより単体複体のホモロジーの定義を見直すことにもつながる。

問い 5.5. 胞体複体の例を下に自由に描いてみよう。

さて、 S^n のホモロジーを順に求めたように胞体分割された空間のホモロジーを順に求めてみよう。ここで次の補題を準備する。

補題 5.6. 貼り付け写像 $\varphi : \partial e^1 \rightarrow X$ に対して、 $X \cup_{\varphi} e^1$ の場合、長完全系列の連結準同型 $\partial_* : H_1(X \cup_{\varphi} e^1, X) \cong H_1(e^1, \partial e^1) \rightarrow H_0(X)$ は $\partial e^1 = e_+^0 \sqcup e_-^0$ として e^1 に向きが定まっているとすると、 $\partial_*(e^1) = \langle \varphi(e_+^1) \rangle - \langle \varphi(e_-^1) \rangle$ となる。

$X^{(0)}$ は有限個の点 $e_1^0, \dots, e_{k_0}^0$ の集合であるから、 $H_k(X^{(0)}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{k_0} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$ と

なる。

次に 1-骨格 $X^{(1)}$ のホモロジーを求める。 $X^{(1)} = X^{(0)} \cup_{\sqcup \varphi_i^1} (\cup_{i=1}^{k_n} D_i^1)$ であり、 $X^{(1)}$ は連続写像 $\varphi_i^1 : \partial D_i^1 \rightarrow X^{(0)}$ によって貼り合わせてえられる空間である。ここで $X^{(1)}$ を求めるのに次の長完全系列を用いる。

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_1(X^{(0)}) \longrightarrow H_1(X^{(1)}) \longrightarrow H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \\ &\longrightarrow H_0(X^{(0)}) \longrightarrow H_0(X^{(1)}) \longrightarrow H_0(X^{(1)}, X^{(0)}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \cong \oplus_{i=1}^{k_1} \mathbb{Z}[D_i^1, S_i^0]$ であったから、 $[D_i^1, S_i^0] = e_i^1$ と書くと、次がえられる。

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_1(X^{(1)}) \longrightarrow \oplus_{i=1}^{k_1} \mathbb{Z}e_i^1 \\ &\longrightarrow \oplus_{i=0}^{k_0} \mathbb{Z}e_i^0 \longrightarrow H_0(X^{(1)}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

つまり、書き直すと次になる。

$$0 \longrightarrow H_1(X^{(1)}) \longrightarrow \oplus_{i=1}^{k_1} \mathbb{Z}e_i^1 \xrightarrow{\partial_*} \oplus_{i=0}^{k_0} \mathbb{Z}e_i^0 \longrightarrow H_0(X^{(1)}) \longrightarrow 0$$

連結準同型写像 ∂_* を決定すれば $H_k(X^{(1)})$ が計算できる。

$\partial_* e_i^1 = e_{j_{i,+}}^0 - e_{j_{i,0}}^0$ と表せる。ここで $X^{(0)}$ のうち $\varphi(\partial D_i^1)$ が $j_{i,-}$ 番目の頂点から $j_{i,+}$ 番目の頂点に向かう辺であるとする。 $e_{j_{i,+}}^0 = e_{j_{i,-}}^0$ である場合には $\partial_* e_i^1 = 0$ である。

問い 5.7. これを元に 2 次元胞体複体のホモロジーはどのように計算できるか？