計算機数学I (2019)
第5回

照井 章（筑波大学 数理物質系 数学域）
Akira Terui (Institute of Mathematics, University of Tsukuba)

第4回のまとめ

- 計算量の概念
- 符号なし多倍長整数の加算の計算量
- 符号つき多倍長整数の表現
- 1変数多項式の加算のアルゴリズム
- 1変数多項式の加算の計算量

第5回の内容

- 1変数多項式のホーナー (Horner) 法
    - 非負整数の2進･10進変換
    - 小数, 分数の2進･10進変換

2.2.2 ホーナー (Horner) 法 (p. 18)

多項式の評価

- $a(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathrm{Z}[x], \quad a_n \neq 0, \ x_0 \in \mathrm{Z}$
- $a(x_0)$ の値を求める

  → $x = x_0$ で $a(x)$ の値を評価する

素朴な方法

- 例題

  $a(x) = 5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 8x - 10,\ x_0 = 10$

- $a(10) = 5\times10^4 + 3\times10^3 - 2\times10^2 + 8\times10 - 10$

乗算回数　4　3　2　1

$\deg(a) = n$ のとき $$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$$

剰余定理, 組立除法 → Horner法

- 剰余定理
  - $a(x) \in \mathrm{Z}[x], \quad x_0 \in \mathrm{Z}$
  - $a(x)$ を $x - x_0$ で割った剰余は $a(x_o)$ に等しい

剰余定理, 組立除法 → Horner法

x_0

	5	3	− 2	8	− 10
10		50	530	5280	52880
	5	53	528	5288	52870

$a(10)$

x 10 x 10 x 10 x 10

$$a(10) = (((5 \cdot 10 + 3) \cdot 10 - 2) \cdot 10 + 8) \cdot 10 - 10 = 52870$$

剰余定理, 組立除法 → Horner法

- より一般に $a(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ に対し $a(x_0)$ を求める場合は $a(x_0) = ((\dots((a_n\, x_0 + a_{n-1})\, x_0 + a_{n-2}) x_0 + \dots) x_0 + a_1)\, x_0 + a_0$ と計算する

Horner(ホーナー)法

- 欧米で知られるようになったのは19世紀
しかし東洋ではより古くから知られていた

Horner法のアルゴリズム

Algorithm Horner法 $(a(x), x_0)$

入力: $a(x) = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n \neq 0, \quad x_0 \in \mathbb{Z}$

出力: $y = a(x_0) \in \mathbb{Z}$

1. $y \leftarrow a_n$;
2. for $i \in [n\text{-}1..0]$ do $y \leftarrow y \cdot x_0 + a_i$;
3. return y;

Horner法の計算量

- Horner法の計算量の見積もりは今日のレポート課題
- 現時点で多倍長整数の乗算の計算量を評価していないことに注意
（レポート課題では係数の四則演算を単位とする）

2.2.3 非負整数の2進･10進変換

非負整数の2進･10進変換

- Horner法のアイデアで効率化できる

非負整数の2進表記→10進表記

- 例題 : $m = (1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1)_2$

  $= (2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0)_{10} = (91)_{10}$

- $M(x) = 1 \cdot x^6 + 0 \cdot x^5 + 1 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1$

  に対し，$M(2)$ を求める問題とみなし，Horner法を適用する

非負整数の2進表記→10進表記

$$M(2) = (((((1 \cdot 2 + 0)\ 2 + 1)\ 2 + 1)\ 2 + 0)\ 2 + 1)\ 2 + 1$$

$$= ((((2 \cdot 2 + 1)\ 2 + 1)\ 2 + 0)\ 2 + 1)\ 2 + 1$$
$$= (((5 \cdot 2 + 1)\ 2 + 0)\ 2 + 1)\ 2 + 1$$
$$= ((11 \cdot 2 + 0)\ 2 + 1)\ 2 + 1$$

$$= (22 \cdot 2 + 1)\ 2 + 1$$

$$= 45 \cdot 2 + 1$$

$$= 91$$

非負整数の10進表記→2進表記

$(91)_{10}$ を2進数で表記する

1. 91を2で割る: 商 45, 余り 1

$$
\begin{array}{rrr}
2) & 91 & \\
\hline
 & 45 & 1
\end{array}
$$

2. 商が0になるまで繰り返す

$$
\begin{array}{rrr}
2) & 91 & \\
\hline
2) & 45 & 1 \\
\hline
2) & 22 & 1 \\
\hline
2) & 11 & 0 \\
\hline
2) & 5 & 1 \\
\hline
2) & 2 & 1 \\
\hline
2) & 1 & 0 \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

非負整数の10進表記→2進表記

3. あまりを下の方の数から順に左から並べる

$(1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1)_2 = (91)_{10}$

2)	91	
2)	45	1
2)	22	1
2)	11	0
2)	5	1
2)	2	1
2)	1	0
	0	1

非負整数の10進表記→2進表記

3. の計算の意味

$91 = \underline{45} \cdot 2 + 1$

$= (\underline{22} \cdot 2+1)2+1$

$= ((\underline{11} \cdot 2+0)2+1)2+1$

$= (((\underline{5} \cdot 2 +1)2+0)2+1)2+1$

$= ((((\underline{2} \cdot 2+1)2+1)2+0)2+1)2+1$

$= (((((1 \cdot 2+0)2+1)2+1)2+0)2+1)2+1$

2)	91	
2)	45	1
2)	22	1
2)	11	0
2)	5	1
2)	2	1
2)	1	0
	0	1

2.2.4 小数，分数の2進10進変換

2進循環小数→有理数表現(10進数)

- その前に... 10進循環小数→有理数表現の復習
- 例題:　$a = 0.\dot{1}4285\dot{7}$
- a を 10^n 倍し，循環節を整数部に持ってくる

2進循環小数→有理数表現（10進数）

$$10^6 a = 142857.\ 142857\ 142857\ \ldots$$

$$a = \qquad 0.\ 142857\ 142857\ \ldots$$

より

$$(10^6 - 1)\ a = 142857$$

$$999999\ a = 142857$$

a について解くと $$a = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$$

2進循環小数→有理数表現（10進数）

- 循環小数が2進表記の場合も計算方法は同様
- 例題：　$a = (0.0\dot{0}01\dot{1})_2$

1. 循環節を小数点のすぐ下に持ってくる

$$a = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(0.\dot{0}01\dot{1})_2, \quad b = (0.\dot{0}01\dot{1})_2$$

2. bを2^n 倍して，循環節を整数部にもってくる

2進循環小数→有理数表現（10進数）

$$2^4 b = 11.\,0011\,0011\,\ldots$$

$$b = \quad 0.\,0011\,0011\,\ldots$$

より

$$(2^4 - 1)_{10}\, b = (11)_2 = (3)_{10}$$

$$15\, b = 3 \text{ より } b = 3/15 = 1/5$$

ゆえに $a = (1/2)\, b = (1/2)\,(1/5) = 1/10$

10進表記→2進表記（整数以外の場合）

$x \in \mathrm{R}$ (x は10進表記）のとき

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} \quad \text{と表す}$$

整数部分　小数部分

このとき，$(z)_2 = (\lfloor x \rfloor)_{10}$, $(p)_2 = (\{x\})_{10}$ とおくと

$$(x)_{10} = (z.p)_2$$

整数部分の10進→2進変換は最初に扱った通り

ここでは $(\{x\})_{10}$ から $(p)_2$ への変換を考える

10進表記→2進表記（整数以外の場合）

例題：$(1/10)_{10}$ の

2進表記の計算

$1/10 \times 2 = 1/5 \quad + 0$

$1/5 \times 2 = 2/5 \quad + 0$

$2/5 \times 2 = 4/5 \quad + 0$

$4/5 \times 2 = 8/5 = 3/5 \quad + 1$

$3/5 \times 2 = 6/5 = 1/5 \quad + 1$

$1/5 \times 2 = 2/5 \quad + 0$

$2/5 \times 2 = 4/5 \quad + 0$

$4/5 \times 2 = 8/5 = 3/5 \quad + 1$

…

10進表記→2進表記（整数以外の

例題

2進表記　計算

1/10 × 2 = 1/5　　+ 0

1/5 × 2 = 2/5　　+ 0

2/5× 2 = 4/5　　+ 0

4/5× 2 = 8/5 = 3/5　+ 1

3/5

1/5 × 2　　5　　+ 0

2/5 × 2　= /5　　+ 0

4/5 × 2　= 8/5 = 3/5　+ 1

…

(1) 与えられた数を順に2倍する

(3) 右辺の値が1に等しくなるか，循環節が出るまで計算を続行

(2) 2倍した数値が1を超えたら1を引いた上で1を書き出す

10進表記→2進表記（整数以外の場合）

例題：$(1/10)_{10}$ の

2進表記の計算

$1/10 \times 2 = 1/5 \quad + 0$

$1/5 \times 2 = 2/5 \quad + 0$

$2/5 \times 2 = 4/5 \quad + 0$

$4/5 \times 2 = 8/5 = 3/5 \quad + 1$

$3/5 \times 2 = 6/5 = 1/5 \quad + 1$

$1/5 \times 2 = 2/5 \quad + 0$

$2/5 \times 2 = 4/5 \quad + 0$

$4/5 \times 2 = 8/5 = 3/5 \quad + 1$

(4) 各桁の数字を上から順に小数点下に並べる

10進表記→2進表記（整数以外の場合）

$$\left(\frac{1}{10}\right)_{10} = (0.000110011\cdots)_2 = (0.0\dot{0}01\dot{1})_2$$

10進表記→2進表記（整数以外の場合）

上記の計算の意味：

$1/10 = \frac{1}{2}(0 + \underline{\frac{1}{5}})$

$= \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(0 + \underline{\frac{2}{5}}))$

$= \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(0 + \underline{\frac{4}{5}})))$

$= \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(1 + \underline{\frac{3}{5}}))))$

$= \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}(1 + \underline{\frac{1}{5}})))))$

$= \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}(0 + \underline{\frac{2}{5}}))))))$

10進表記→2進表記の例題

- 例題: −91.1 を 2 進数で表記せよ
- 小数は，以下の通り表す
  - 有理数: 有限小数か循環小数
  - 無理数: 小数第 9 位で四捨五入
- 負数は整数部 8 桁の 2 の補数で表す

10進表記→2進表記の例題

- これまでの計算から
  - $(91)_{10} = (1011011)_2$
  - $(0.1)_{10} = (0.0\dot{0}01\dot{1})_2$
- まず $(91.1)_{10}$ を2進数で表すと

$$(91.1)_{10} = (01011011.0\dot{0}01\dot{1})_2$$

- $(-91.1)_{10}$ を2の補数を用いた2進数で表すと

$$(-91.1)_{10} = (10100100.1\dot{1}10\dot{0})_2$$

循環小数の2の補数表示に関する注意

循環小数の符号反転時は全桁(ビット)を反転させるだけで，末尾桁に1を加えることはしません

$$(91.1)_{10} = (01011011.0\dot{0}01\dot{1})_2$$

$$+)\quad (-91.1)_{10} = (10100100.1\dot{1}10\dot{0})_2$$

-2^7

$2^6+2^5+\ldots+1=2^7-1$

$2^{-1}+2^{-2}+\ldots=1$

第5回のまとめ

- Horner法による1変数多項式の評価
- Horner法のアルゴリズムと計算量
- 非負整数の2進･10進変換
- 小数･分数の2進･10進変換

第6回の内容

- 多項式や多倍長整数の乗算