9/17

NO. 1

DATE 16 APR 2012

微積分Ⅰ (2012)

授業の構成

- 微積分Ⅰ (1学期) : 1変数関数の微積分
- 微積分Ⅱ (2学期) : 多変数 〃 〃
- 微積分Ⅲ (3学期) : 実数と連続関数の性質など ε-δ 論法を用いた議論.

大学で学ぶ微積分

- 高校まで … 主に計算法や概念の紹介が中心

◎ 微積分の歴史をひもとくと…
- 17世紀 : 微積分学の体系化
- 18世紀 : 微積分学の計算や応用の発展
  - 理論の展開や計算は必ずしも厳密とは限らず (現代と比べて). 直観によるものもあった
  - → しばしば矛盾が導かれる!

◎ 一方 (平面) 幾何学では…
- 定義や公理から出発して厳密な論証をもとに理論を構築 (「ユークリッド原論」以来)

◎ 微積分の厳密な理論の構築
- 矛盾が生じないような理論の構築が必要
- そのためには.
  - 実数とは何か? どのように構成するのか?
  - 収束とは何か? 連続とは何か?

  といった概念を明らかにする必要に迫られる
- 19世紀 : 微積分学の厳密な数学的基礎の構築.

↓

大学の微積分で学ぶ.

(1〜2学期 : アウトライン
3学期 : ε-δ 論法を詳しく)

KOKUYO

第1章：連続関数

$\boxed{\text{実数の構成}}$

◎ 集合

- 集合：$A, B, \dots$
- 元（要素）：$a, b, x, y, \dots$
- 数 a が集合 A の元：a は A に属する：$a \in A$
- a は A に属さない：$a \notin A$
- A は B の部分集合 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\underline{x \in A \Rightarrow x \in B}$.
- $A \subset B$ かつ $B \subset A$ $\iff$ $A = B$.
- 集合の記述法
  - 外延的記法：$\{1, 3, 5, 7, 9\}$
  - 内包的記法：$\{x \mid \underbrace{x\text{は}10\text{未満の正の奇数}}_{x\text{に関する条件（命題）}}\}$
- 和集合：$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$
- 共通部分：$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$

$$\bigcup_{n=1}^{k} A_n = \{x \mid \text{ある } i \in \{1, \dots, k\} \text{ が存在して } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{n=1}^{k} A_n = \{x \mid \text{すべての } i \in \{1, \dots, k\} \text{ に対して } x \in A_i\}.$$

- 集合の差：$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$.

実数の区間

$\mathbb{R}$：実数全体の集合．　(有限) $a, b \in \mathbb{R}$．$a < b$ とする．

有限区間

$$\left\{\begin{array}{lll} [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & : & \text{閉区間} \\ [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} & & \\ (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} & & \\ (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} & : & \text{開区間} \end{array}\right.$$

↑↑ 区間の端点

無限区間

$$\left\{\begin{array}{l} [a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\} \\ (a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\} \\ (-\infty, a] = \{ \qquad\qquad \} \\ (-\infty, a) = \{ \qquad\qquad \} \\ (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \end{array}\right.$$

(練習問題)

Ⅲ 実数の構成

・自然数全体のなす集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

・整数 〃 $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

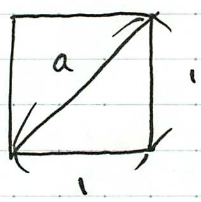
{・加法に関する単位元 0
{・$a \in \mathbb{N}$ に対し、$a + b = 0$ をみたす数 $b \to -a$ をつくる
を加える。

・有理数全体のなす集合 $\mathbb{Q}$

$m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ に対し、$\dfrac{n}{m}$ をつくる。
(互いに素)

(但し $\dfrac{n}{m} = \dfrac{2n}{2m} = \dfrac{3n}{3m} = \cdots$)

・さて、



一辺の長さが1の正方形の対角線の長さは、ピタゴラス(三平方)の定理より

$$a^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

をみたす。
では $a^2 = 2$ をみたす数 a をどう表すか?

$a^2 = 2$ をみたす"量"は、直線上の長さとして存在するが、それを"数"(値)で表すことが必要。

4/17 ところが、a は有理数では表せない!

・Cantor(カントール)のアイデア。

$1^2 = 1$, $2^2 = 4$ より $1^2 < \overset{\overset{2}{\shortparallel}}{a^2} < 2^2$
∴ $1 < a < 2$.

$(1.4)^2 = 1.96$, $(1.5)^2 = 2.25$ より $(1.4)^2 < a^2 < (1.5)^2$
∴ $1.4 < a < 1.5$
$\dfrac{14}{10} < a < \dfrac{15}{10}$