6/26

三角関数の有理式の積分 (p.101)

三角関数 sin x, cos x, tan x の有理式の積分.

$\Longrightarrow$ $u = \tan\frac{x}{2}$ に置き換えることで、u の有理式の積分へ帰着する.

・$u = \tan\frac{x}{2}$.

・$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(1+u^2)$.

・$\sin x = \sin\left(2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$

$= \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

・$\cos x = \cos\left(2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1$

$= \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

・$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)}{\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} = \dfrac{2u}{1-u^2}$.

例 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$. (微分積分学. p.65. 問題 2.13)

$u = \tan\frac{x}{2}$ で置換すると

x	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
u	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{1}{u}\,du$

$= \log u\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = 0 - \log\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\log 3$.

本問においては．$u = \tan\frac{x}{2}$ の変換を行わなくても積分できる．

上の例

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1-\cos^2 x}\,dx$$

$t = \cos x$ で変換する．$\frac{dt}{dx} = -\sin x$．

x	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	0

$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{-dt}{1-t^2} = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ -\log(1-t)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}} + \log(1+t)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\log\frac{1}{2} + \log\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-(\log 1 - \log 2) + (\log 3 - \log 2)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\log 3 .$$

$\boxed{\text{広義積分}}$ (p.108)

・Riemann積分の定義：

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$I=[a,b]$：有界な区間．　$f(x)$：I上有界．

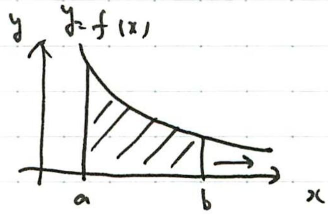
・次のような場合はどうするか？

① 積分区間が有限でない．　(例) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.

② 被積分関数が有界でない．　(例) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

このような場合に定義する積分 ⇒ $\boxed{\text{広義積分}}$

◎ 積分区間が有限でない場合．



$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

極限値が存在する ⇒ 広義積分は <u>収束する</u>

広義積分が収束しない ⇒ 〃 <u>発散する</u>

$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ ： 任意に1点 c をとって

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx .$$

それぞれの項が収束するとき．その和の値は c のとり方によらない．

例 3.21　(p.110)

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1.$$

例 3.23

$$\int_0^\infty \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty} \sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\sin b.$$

より発散（振動）.

これを次のように略記する.

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 0-(-1) = 1.$$

★置換積分, 部分積分も通常通り…ただし、極限をとる前に!

例 3.25　（広義積分における置換積分の例）

$$\int_0^\infty x e^{-x^2}dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A x e^{-x^2}dx$$

$$t = x^2 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2x, \quad \frac{x : 0 \to A}{t : 0 \to A^2}.$$

$$\therefore \int_0^A x e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^A e^{-t}dt = \frac{1}{2}(-e^{-t})\Big|_0^{A^2}$$

$$= \frac{1}{2}(1-e^{-A^2})$$

よって

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-A^2}) = \frac{1}{2}.$$

$$\left(\int_0^\infty x e^{-x}dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-t}dt = \frac{1}{2}(-e^{-t})\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}(0-(-1)) = \frac{1}{2}\right.$$

のように略記.)

4限

5限

例 3.26 （広義積分における部分積分の例）

$$\int_0^\infty \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{e^{-x}}_{g'}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-x})\,dx .$$

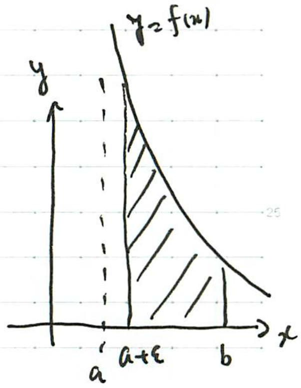
$$= -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,dx .$$

$$\boxed{\alpha \text{ が正の定数のとき，} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = 0 .}$$ を用いると

$$\lim_{x\to\infty}(-xe^{-x}) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{e^x}\right) = 0 \quad \text{より，}$$

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = (-xe^{-x})\Big|_0^\infty + (-e^{-x})\Big|_0^\infty$$
$$= (0-0) + (0-(-1)) = 1 .$$

(ii) 被積分関数が有界でない場合．



・$\lim_{x\to a+0} f(x)$ が発散のとき．

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx .$$

・$\lim_{x\to b-0} f(x)$ が発散のとき．

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx .$$

・積分区間の両端で有界でないときも同様．

(例) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to 1-0}} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} .$$

極限値が存在 ⇒ 広義積分の収束
収束しない場合は 発散

・区間の内部に有界でない点があるときは，区間を分割する。

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{|x|^{1/2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{(-x)^{1/2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^{1/2}}$$

$$= \lim_{b\to -0}\int_{-1}^{b} \frac{dx}{(-x)^{1/2}} + \lim_{a\to +0}\int_{a}^{1} \frac{dx}{x^{1/2}}$$

$$= \lim_{b\to -0} -2(-x)^{1/2}\Big|_{-1}^{b} + \lim_{a\to +0}\left(2x^{1/2}\right)\Big|_{a}^{1}$$

$$= -2(0-1) + 2(1-0) = 4.$$

例 (p.112) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$ としてはならない。

・被積分関数が有界なのに，積分が負になるはずがない。 ⟹ $x=0$ で $\frac{1}{x^2}$ が有界でない。

・$\frac{1}{x^2}$ の原始関数が $-\frac{1}{x}$ というのは原点を含む区間では成り立たない。

よって

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to +0}\int_{-1}^{-a} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{b\to +0}\int_{b}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

$$= \lim_{a\to +0}\left(\frac{1}{a} - 1\right) + \lim_{b\to +0}\left(-1 + \frac{1}{b}\right) = +\infty.$$

⟹ 発散.

<u>例 3.24</u>

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{a\to+0}\int_{-1}^{-a}\frac{dx}{x} + \lim_{b\to+0}\int_{b}^{1}\frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{a\to+0}\log|x|\Big|_{-1}^{-a} + \lim_{b\to+0}\log|x|\Big|_{b}^{1}$$

$$= \lim_{a\to+0}\log a + \lim_{b\to+0}(-\log b)$$

は<u>発散</u>. $(-\infty + \infty)$

但し. $a=b=\varepsilon\ (>0)$ とすると.

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x} = \log\varepsilon + (-\log\varepsilon) = 0$$

より

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right) = 0.$$

(Cauchy の主値積分)

<u>例</u> (置換積分の例)

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} =$$

$t=\sqrt{x} \Rightarrow \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$x: 0 \to 1$	
$t: 0 \to 1$	.

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to1-0}} 2\int_a^b\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to1-0}} 2\cdot\mathrm{Arcsin}\,t\Big|_a^b$$

$$= \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to1-0}} 2(\mathrm{Arcsin}\,b - \mathrm{Arcsin}\,a) = 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi.$$

◎ 積分法（第3章）で授業中に扱いきれなかった内容.

- Riemann 積分の定義　（§3.7）
- 無理関数の積分　（§3.6）
- 広義積分の絶対収束（ガンマ関数, ベータ関数）
  （pp. 114 ～ 117）
- 定積分の応用（曲線の長さ）（§3.9）