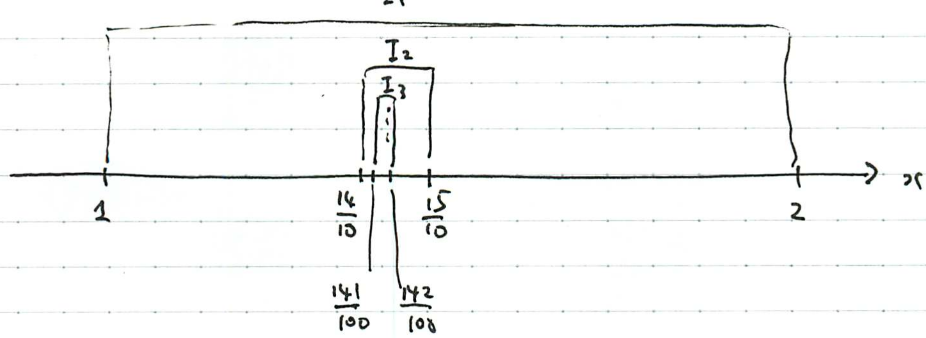
$(1.41)^2 = 1.9881$, $(1.42)^2 = 2.0164$ より

$(1.41)^2 < a^2 < (1.42)^2$ ∴ $\frac{141}{100} < a < \frac{142}{100}$

さらに狭めると $\frac{1414}{1000} < a < \frac{1415}{1000}$

これを数直線上でまとめると…



として、aの存在する区間の幅をどんどん狭めていくことができる。すなわち、aの値を有理数で何桁でも近似することが可能。

☆ Cantorのアイデア（区間縮小法）

区間の列：$I_n = [a_n, b_n]$, $|I_n| = b_n - a_n$

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$

$n \to \infty$ のとき、$|I_n| \to 0$ とする

（区間の縮小列）

このとき、すべての区間 I_n にただ1つの点 a が共通して存在すると認め、これを1つの実数とおく！

すなわち、ある $a \in \mathbb{R}$ がただ1つ存在して

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$$

実数の連続性公理

公理 … 理論の出発点として、証明なしに認める定理のようなもの（性質など）

◎ 連続性公理のいくつかの異なる表し方

連続性公理(Cantorによる)は、いくつかの異なる表し方(同値な命題)で表すことができる(詳しくは3学期の微積分III).

(p.8) $\boxed{\text{上に有界な非減少数列は極限値をもつ.}}$

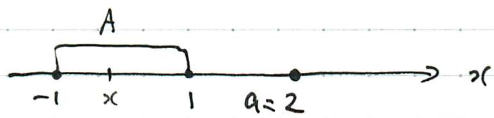
◎ 集合の上界, 下界, 上限, 下限, 最大値, 最小値.

A: $\mathbb{R}$の空でない部分集合、 (例) $A=[-1, 1]$

定義 (上界, 下界(か)) $a\in\mathbb{R}$とする.

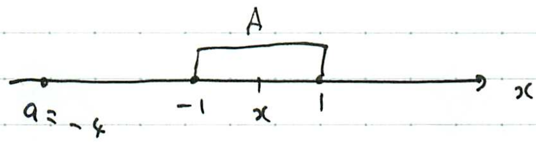
(1) aがAの上界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x\in A\ \ x\leq a$.

(例)



(2) aがAの下界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x\in A\ \ x\geq a$.

(例)



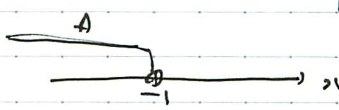
□

定義 (上に有界, 下に有界)

(1) Aは上に有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Aの上界が(少なくとも1つ)存在する.
(2) Aは下に有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Aの下界が(________)存在する.
(3) Aは有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Aは上に有界かつ下に有界.

□

(例) ① $A=\underset{\substack{\| \\ (-\infty,-1)}}{}\{x\in\mathbb{R} \mid x<-1\}$.



Aは上に有界であるが下に有界でない.

② $A=\{x\in\mathbb{R} \mid -1\leq x\leq 1\}$.
Aは有界.

定義（上限，下限）　$a \in \mathbb{R}$ とする．

(1) a が A の上限（最小上界）とは，
a が A の上界の中の最小値であること，すなわち

① $\forall x \in A \quad x \leq a$
② $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad \text{s.t.} \quad x > a - \varepsilon$

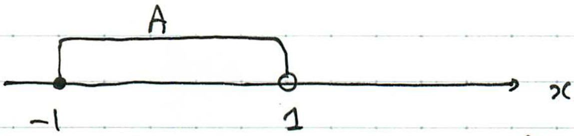
をみたすことをいい　$a = \sup A$ で表す．
(supremum)

(2) a が A の下限（最大下界）とは，
a が A の下界の中の最大値であること，すなわち

① $\forall x \in A \quad x \geq a$
③ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad \text{s.t.} \quad x < a + \varepsilon$

をみたすことをいい　$a = \inf A$ で表す．
(infimum)

(例)　$A = [-1, 1)$ のとき．



$\max A$：存在しない．　$\min A = -1$．
$\sup A = 1$，　$\inf A = -1$．

定義（最大値，最小値）　$a \in \mathbb{R}$ とする．

(1) a が A の最大値 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a \in A$ かつ a は A の上界．
すなわち，$a \in A$ かつ $\forall x \in A \quad x \leq a$．
$a = \max A$ で表す．

(2) a が A の最小値 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a \in A$ かつ a は A の下界．
すなわち　$a \in A$ かつ $\forall x \in A \quad x \geq a$．
$a = \min A$ で表す．

実数を番号に従って並べたもの。

数列 : $a_1, a_2, a_3, \ldots$ $\quad a_i \in \mathbb{R}$.

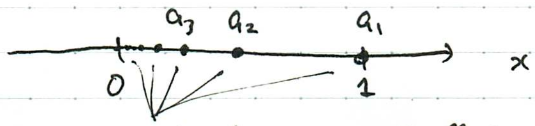
$\{a_n\}$ もしくは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表す。

定義 (数列の有界性) $\{a_n\}$: 数列 とする。

(1) $\{a_n\}$ が上に有界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が上に有界.
(2) $\{a_n\}$ が下に有界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が下に有界.
(3) $\{a_n\}$ が有界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\{a_n\}$ は上に有界かつ下に有界.

(例) $a_n = \frac{1}{n}$. $\quad \{a_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$

このとき



これらの(a_nの)点全体のなす集合が $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$\{a_n\}$ は有界.

4/24

定義 (数列の単調増加、単調減少) $\{a_n\}$: 数列.

(1) $\{a_n\}$ が広義単調増加 (非減少) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots$

(2) $\{a_n\}$ が広義単調減少 (非増加) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots$

以上をふまえて、再び実数の連続性公理.

(p.8) $\boxed{\text{公理}}$ 上に有界な(非減少)(広義単調増加)数列は極限値をもつ。
(下に有界な(非増加)(広義単調減少)数列は極限値をもつ。)

$\{a_n\}$: $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots$ ... 広義単調増加

$^\exists a$: $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の上界 $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ は収束.
(その極限値が1つの実数を定める).

◎ 連続性公理の応用：自然対数の底 e の存在.

定理 1.3 (p.9) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,\cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ は 極限値をもつ.

Proof 連続性公理より, $\{a_n\}$ が 広義単調増加 かつ 上に有界であることを示せばよい.

準備 $n \geqq 2$ のとき,

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k .$$

2項定理

$$\binom{n}{k} = {}_nC_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}.$$

(2項係数)

$$= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\cdots\frac{n-(k-1)}{n}$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

と表されることに注意する.

(1) 広義単調増加 であること.

$a_1 = 2,\ a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ より $a_1 < a_2$.

$n \geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}
a_n &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&< 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&< 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}_{k=n+1\ \text{の項}}
\end{aligned}$$

$$< 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) = a_{n+1}$$

ゆえに $a_n < a_{n+1}$.
よって $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ より $\{a_n\}$ は広義単調増加.

(2) 上に有界であること.
$a_1 = 2 < 3$.
$n \geqq 2$ のとき.

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\wedge\qquad\qquad\wedge\qquad\qquad\wedge$$

$$< 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\ 1 \cdot 1 \cdots 1$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{k}$$

$$< 2 + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{k-1\text{コ}}$$

$$= 2 + \underline{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}}$$

初項 $\frac{1}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比級数($n-1$項)の和.

$$= 2 + \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$< 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2 + 1 = 3.$$

よって $n \geqq 2$ のとき $a_n < 3$.
したがって, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し, $a_n < 3$.

(1) (2) より, $\{a_n\}$ は広義単調増加かつ上に有界であるので, 実数の連続性公理により, 極限値をもつ. □

定義: 定理1.3によって定まる極限値を e で表す. □