数列の極限

▨ 数列の収束

数列 $\{a_n\}$

定義 数列 $\{a_n\}$.
番号 n を限りなく大きくするとき,
a_n が一定の値 α に限りなく近づく

⇒ 数列 $\{a_n\}$ は $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ に収束する} \\ \text{極限値 } \alpha \text{ をもつ} \end{array} \right\}$ という.

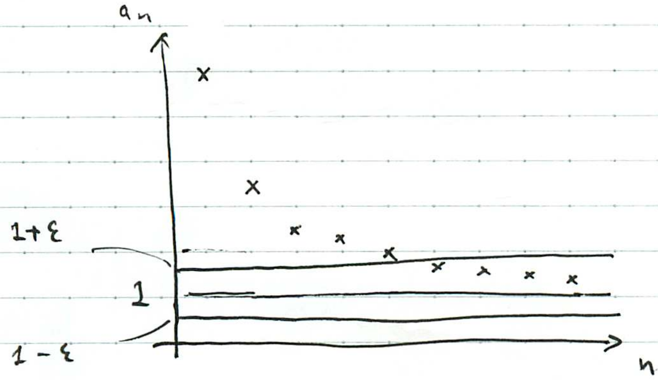
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. $a_n \to \alpha$ $(n\to\infty)$ で表す. ▨

定義 1.1 数列 $\{a_n\}$ が (実数) α に収束する

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad \text{s.t.} \quad n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

(任意の $\varepsilon>0$ に対して. ε によって定まる 自然数 N が存在して, n が N 以上ならば. $|a_n - \alpha|$ は ε より小さくなる. $\boxed{\varepsilon\text{-}N \overset{}{\underset{(\text{論})}{\wedge}}\text{法 という.}}$) ▨

例 $\{a_n\}$. $a_n = 1 + \frac{5}{n}$. のとき. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.



1を中心として上下の幅が 2ε の帯を考える.
たとえば, $\varepsilon = 1$ に対して $N = 6$ とおくと. $n \geq N$ をみたす a_n の点は すべて この帯の中に入る.

同様に, より小さな ε に対しても. N をより大きくすると. $a_N, a_{N+1}, \cdots$ と a_N から先の点はすべて 幅 2ε の帯の中に入る. こうして ε をいくらでも小さくすることで, a_n がいくらでも 1 に近づくということを表すことができる.

◍ 数列の発散

定義 数列 $\{a_n\}$.

1) 番号 n を限りなく大きくするとき、
a_n が限りなく大きくなる。

⇒ 数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散するという。

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $a_n \to +\infty \ (n\to\infty)$ で表す。

2) 番号 n を限りなく大きくするとき、
$-a_n$ が限りなく大きくなる

⇒ 数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散するという。

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. $a_n \to -\infty \ (n\to\infty)$ で表す。 ▨

定義 1) 数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散する

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall K>0 \ \exists N = N(K)$ s.t. $n \geqq N \Rightarrow a_n > K$

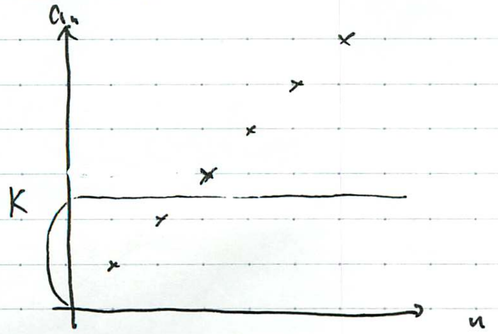
（任意の $K>0$ に対して、K によって定まる自然数 N が存在して、n が N 以上ならば、a_n は K より大きくなる。）

2) 数列 $\{a_n\}$ が負の無限大に発散する

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall K>0 \ \exists N = N(K)$ s.t. $n \geqq N \Rightarrow -a_n > K$.

▨

例 $\{a_n\}$ $a_n = n$ のとき、 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.



幅 K の帯を考える。 任意の K に対して

このとき、$N = \lfloor K \rfloor + 1$ とおくと、

（$\lfloor a \rfloor$ は（ガウス記号）といい、a を越えない最大の整数を表す $a \in \mathbb{R}$ 床関数 (floor function)）

a_N, a_{N+1}, … と、a_N から先の点はすべてこの帯からはみ出る。

NO. 13

DATE 24 APR 2012

⊘ 数列の極限の性質.

以下の性質は ε-N 法で証明できる（詳細は3学期）.

定理 1.1 (p.7) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ （ただし α, β は有限な値）のとき, 次が成り立つ:

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ （複号同順）

(2) $c \in \mathbb{R}$ のとき. $\lim_{n\to\infty} c\, a_n = c\alpha$.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(4) $\beta \neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$.

(5) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$ ならば $\alpha \leq \beta$. ▨

定理 1.2 （はさみうちの原理） $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ であり かつ $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n \leq c_n$ ならば. 数列 $\{b_n\}$ も収束して $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$. ▨

関数の極限

関数

(函)

f: 集合Xの各元 x に対し、集合Yのある元 y をただ1つ対応させる規則とする。

このとき:

- fを **X上の関数** という。
- Xの元xに対応する関数fの値を **$f(x)$** と表す。それが $y \in Y$ に等~~しければ~~しいことを **$y = f(x)$** と表す。
- x : **独立変数** (独立に変化させる)
- y : **従属変数** (xの値に応じて定まる)
- X : fの **定義域**.
- $E = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$: (Xにおける) fの **値域**
- 次のような書き方をすることもある (一般の写像の記法にならう):

$$\begin{array}{cccl} f: & X & \longrightarrow & Y \text{ (もしくはE)} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & f(x) \text{ (もしくは関数fを定義する式)} \end{array}$$

(例) 時刻 0 からスタートして、時刻 x まで走った距離
$f(x)$:
と定めると、関数 $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が定まる.

↑ 0以上の実数を表す

定義域 $X = \mathbb{R}_{\geq 0}$, 値域 $Y = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

※ 1学期は $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ である関数を扱う。
(すなわち、実数(の部分集合)から実数(の部分集合)への関数.)

1対1関数、逆関数.

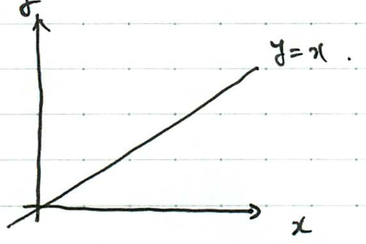
$f: X \to Y$ が 1対1 である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall x, y \in X \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

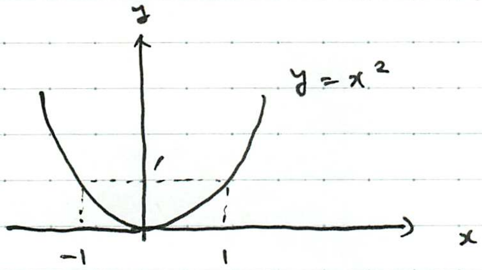
(もしくは対偶を用いて

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \quad).$$

(例) 1) 1対1関数の例 : $y = \overset{f(x)}{x}$.



2) 1対1関数でない例 : $y = \overset{f(x)=}{x^2}$.

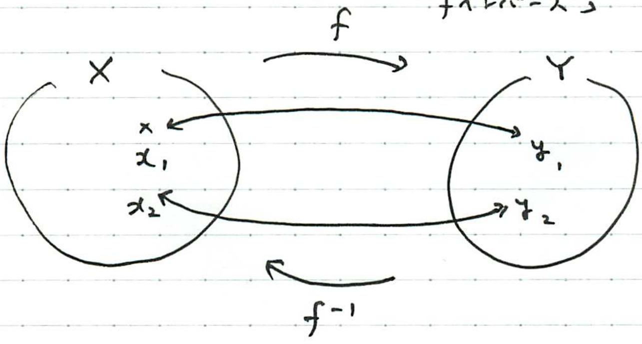


$f(x) = 1$ をみたす x は 2つ
存在する! $(x = \pm 1)$

• f が 1対1 ならば、「 $\forall y \in Y$ に対し、$\underset{\text{「ただ1つ}}{\exists 1}$ $x \in X$ 存在する」

s.t. $y = f(x)$ 」

これにより、f の逆関数 $\underset{\text{「fインバース」}}{f^{-1}}$: $Y \longrightarrow X$ が定まる.



f が 1対1 ならば、$\forall y \in Y$ に対し、$y = f(x)$ をみたす $x \in X$ が
ただ1つ定まる。すなわち関数が1つ定まる。これを f の
逆関数という。

◎ 関数の単調増加, 単調減少, 有界性 $X, Y \subset \mathbb{R}$

以下では, 関数 $f: X \to Y$ (X: 定義域, Y: 値域) とする.

定義 (関数の単調増加, 単調減少)

(1) · f が 非減少 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

· f が 単調増加 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

(2) · f が 非増加 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

· f が 単調減少 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

(3) f が 単調 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f が単調増加 or 単調減少. ▨

定義 (関数の有界性)

(1) f が 上に有界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists}K \in \mathbb{R}$ ${}^{\forall}x \in X$
$f(x) \leq K$.

($\Longleftrightarrow$ 集合として $Y = \{f(x) \mid x \in X\}$ が上に有界).

(2) f が 下に有界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists}K \in \mathbb{R}$ ${}^{\forall}x \in X$ $f(x) \geq K$.

(3) f が 有界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f は上に有界かつ下に有界. ▨

◎ 関数の 極限.

定義 (関数の 極限値) 関数 $y = f(x)$ において:

(1) x が $x \neq a$ かつ a に限りなく近づくとき,
$f(x)$ の値が定数 A に限りなく近づく

$\Longrightarrow$ 「$x \to a$ とするときの $f(x)$ の極限値は A である」
といい. $\lim_{x \to a} f(x) = A$ で表す.

☆ $f(x)$ は $x = a$ で定義されている必要はない.

(2) x が $x > a$ $\overset{\text{あるいは}}{(x < a)}$ を保ちながら a に限りなく近づくとき、$f(x)$ が A に限りなく近づく.

⇒「$\underset{(x \to a^+)}{x \to a+0}$ （あるいは $\underset{(x \to a^-)}{x \to a-0}$）のときの $f(x)$ の右極限値（あるいは左極限値）は A である」といい、

$$\underset{(x \to a^+)}{\lim_{x \to a+0}} f(x) = A \quad \left(\text{あるいは} \underset{(x \to a^-)}{\lim_{x \to a-0}} f(x) = A\right)$$

で表す.

$\left\{\begin{array}{l} x \to 0+0 \\ x \to 0-0 \end{array}\right\}$ はそれぞれ $\left\{\begin{array}{l} x \to +0 \\ x \to -0 \end{array}\right\}$ と表す.

☆ $\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \lim_{x \to a+0} f(x) = A$ かつ $\lim_{x \to a-0} f(x) = A$.

(3) x 正の方向（負の方向）に限りなく大きくしたとき、$f(x)$ が A に限りなく近づく

⇒「$x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ のときの $f(x)$ の極限値は A である」といい、$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ （あるいは $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$）で表す.

▨

定義（関数の発散）

(1) x が $x \neq a$ かつ a に限りなく近づくとき、$f(x)$ が限りなく大きく（小さく）なる

⇒「$x \to a$ のとき、$f(x)$ は正（負）の無限大に発散する」といい、$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$ で表す.

(2) x が $x > a$ $(x < a)$ を保ちながら a に限りなく近づくとき、$f(x)$ が限りなく大きく（小さく）なる

⇒「$x \to a+0$ $(x \to a-0)$ のとき、$f(x)$ は
$(x \to a^+)$ $(x \to a^-)$
正（負）の無限大に発散する」といい、

$$\lim_{\substack{x \to a+0 \\ (x \to a^+)}} f(x) = +\infty\ (-\infty) \quad \left(\lim_{\substack{x \to a-0 \\ (x \to a^-)}} f(x) = +\infty\ (-\infty) \right)$$

で表す。

(3) x を正の方向（負の方向）に限りなく大きくしたとき、$f(x)$ が限りなく大きく（小さく）なる

⇒「$x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ のとき、$f(x)$ は正（負）の無限大に発散する」といい、$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\ (-\infty)$

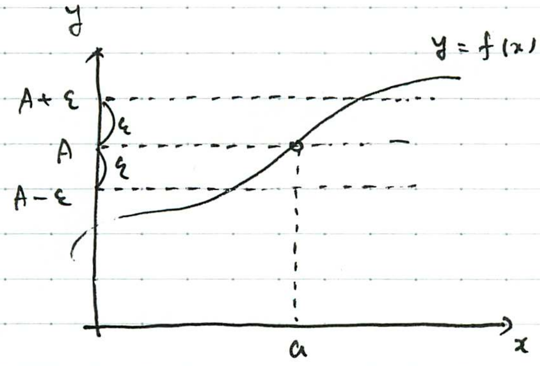
$\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\ (-\infty) \right)$ で表す。

▨

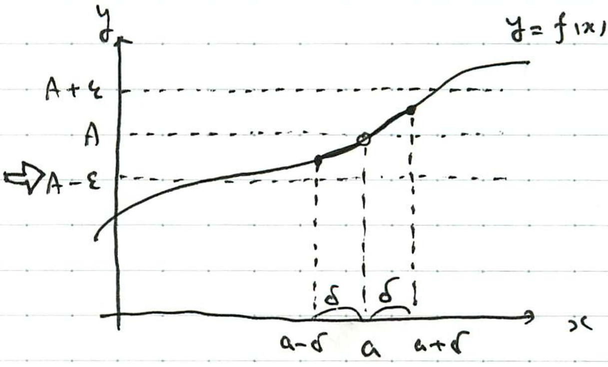
定義 1.2 (p.21) $f(x)$ は $a \in \mathbb{R}$ を含む開区間の、a を除く各点で定義されているものとする（$x = a$ で、定義されている必要はない）。

(1) $$\lim_{x \to a} f(x) = A \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

（任意の $\varepsilon > 0$ に対して、それによって定まる正の実数 δ が存在して、$0 < |x - a| < \delta$ をみたすすべての x に対して $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つ。$\boxed{\varepsilon\text{-}\delta \text{ 論法という。}}$）

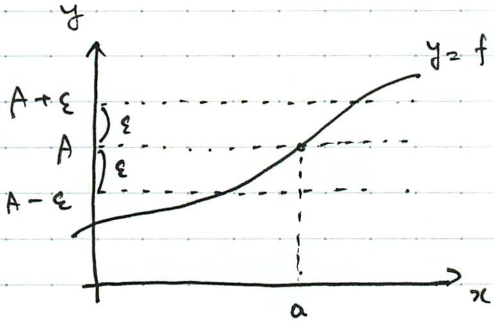


$y = A$ のまわりに幅 2ε で（どんなに幅が小さな）帯をとっても…

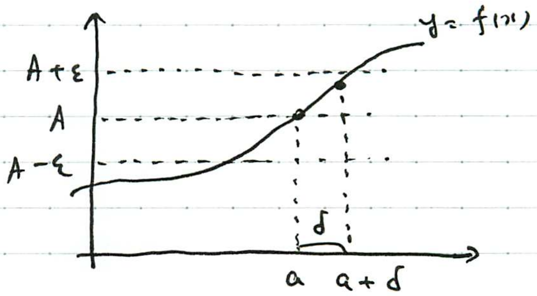


$x \in (a - \delta, a + \delta)$ での $f(x)$ の値が帯の中に含まれる（ような δ をとることが可能である。）

(2) $\lim_{x\to a+0} f(x) = A \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ {}^{\exists}\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.t.
$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.



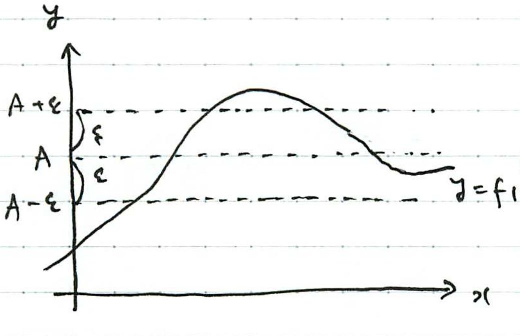
⇨



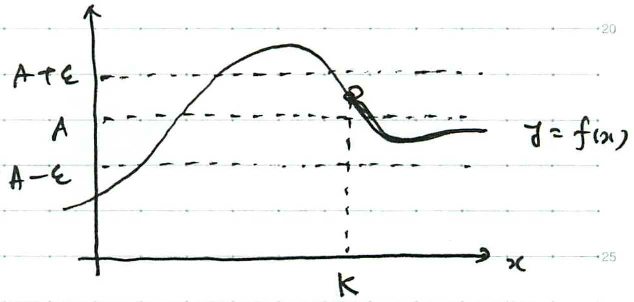
この図は (1)の場合と同じ。

x→a+0の時は、aの右側の区間のみを扱うことに注意。（x→a−0の場合も同様。）

(3) $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ {}^{\exists}K = K(\varepsilon) > 0$ s.t.
$x > K \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.



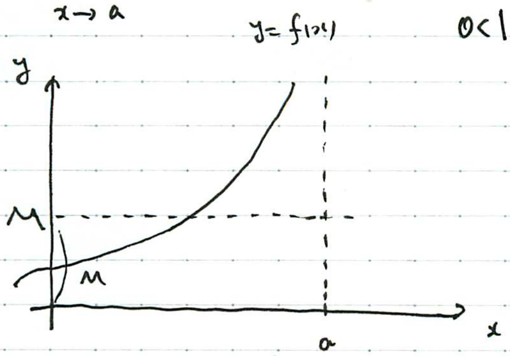
⇨



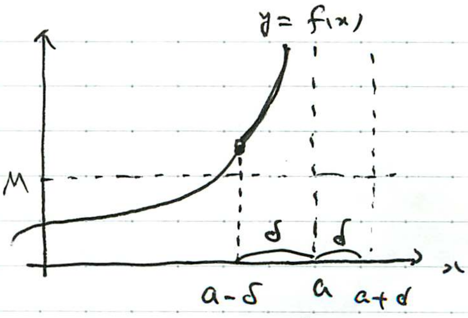
(1), (2) と同様、中心 y=A、幅 2ε の帯を考える。

x>K では f(x) の値はすべて A−ε<y<A+ε の帯に含まれる！

(4) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall M > 0 \ {}^{\exists}\delta = \delta(M) > 0$ s.t.
$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.



⇨



x軸から高さMの帯を考える。

x∈(a−δ, a+δ) では f(x) の値がすべて帯からはみ出る。

NO. 20

DATE 5.4.2012

◍ 関数の極限の性質.

以下の性質は ε-δ 論法で証明できる（詳細は3学期）.

定理 1.6 (p.17) $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ のとき.

(ただし A, B はそれぞれ有限な値). 次が成り立つ:

(1) $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ (複号同順)

(2) $c \in \mathbb{R}$ のとき $\lim_{x\to a} cf(x) = cA$.

(3) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$

(4) $B \neq 0$ ならば $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

(5) すべての $x \neq a$ に対して $f(x) \leq g(x)$ ならば $A \leq B$. ▨

定理 1.7 (はさみうちの原理) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$.

かつ $\forall x \neq a$ に対して $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ならば, $g(x)$ も $x \to a$ のとき極限値をもち, $\lim_{x\to a} g(x) = A$. ▨

定理 1.8

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = A$ が存在 $\Rightarrow$ $f(x)$ は $x=a$ の近傍で有界.

すなわち, $^\exists K>0$, $^\exists \delta>0$ s.t. $0<|x-a|<\delta$
$\Rightarrow |f(x)| \leq K$.

(2) $\lim_{x\to a} f(x) = A > 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ は $x=a$ の近傍で正.

すなわち, $^\exists c>0$, $^\exists \delta>0$ s.t. $0<|x-a|<\delta$
$\Rightarrow f(x) \geq c$.

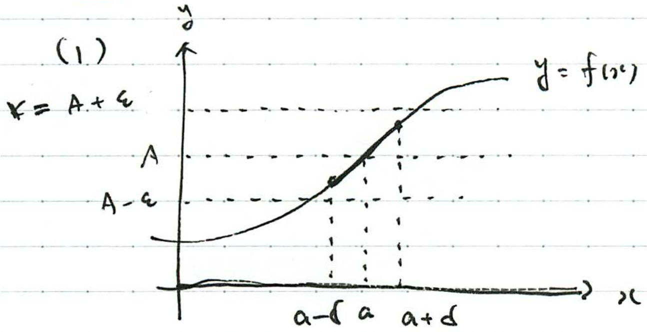
関数の極大・極小判定 (定理 2.22 (p.72))
などで利用.

NO. 21

DATE 5 4 2012

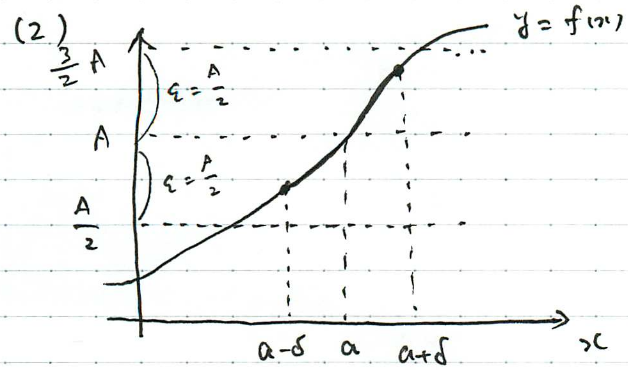
Proof のアウトライン．

(1)



$x \in (a-\delta, a+\delta)$ では
$f(x)$ の値は左図の帯の中に
入るので $|f(x)| \leq K$．

(2)



$\varepsilon = \frac{A}{2}$ ととり．これに応じて
δ を選ぶと．$x \in (a-\delta, a+\delta)$
では $f(x) \geq \frac{A}{2} > 0$．

▨

☆三角不等式（教科書にちゃんとした証明があまり載っていないと思われるが、いつの間にか常識になってい？．）

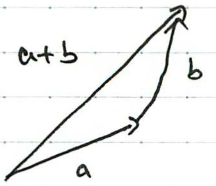
定理 $A, B \in \mathbb{R}$ とするとき．

(1) $|A + B| \leq |A| + |B|$．

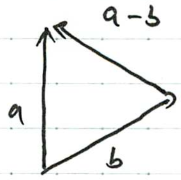
(2) $|A - B| \geq |A| - |B|$．

Proof のアウトライン（図）

(1)



(2)



$|a+b| \leq |a| + |b|$．

$|a-b| + |b| \geq |a|$ より

$|a-b| \geq |a| - |b|$．

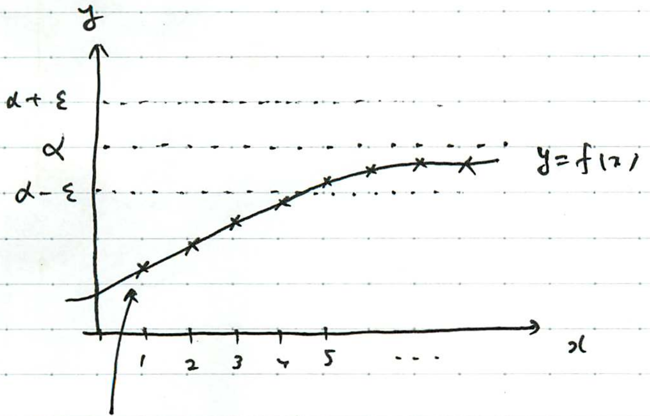
▨

NO. 22

DATE 5 4 2012

定理 1.9 $x \in [0, \infty)$ において定義された関数 f が上に有界かつ非減少 $\Rightarrow$ $\lim_{x \to \infty} f(x)$ が存在.

Proof のアウトライン



数列 $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界かつ非減少 $\Rightarrow$ 実数の連続性の公理により 収束 $\Rightarrow$ 極限値 $x = a$ が存在.

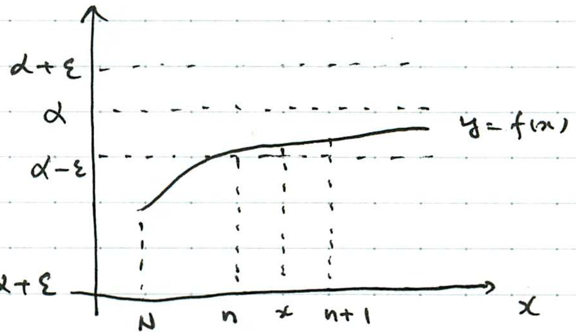
$\therefore$ $^{\forall}\varepsilon > 0$ $^{\exists}N = N(\varepsilon)$ s.t. $M \geqq N \Rightarrow |f(n) - \alpha| < \varepsilon$.

このとき, $^{\forall}x \geqq N$ に対し,
$^{\exists}n \in \mathbb{N}$ s.t. $n \leq x < n+1$.
f は非減少なので

$$f(n) \leq f(x) \leq f(n+1)$$

右図より

$$\alpha - \varepsilon < f(n) \leq f(x) \leq f(n+1) < \alpha + \varepsilon$$



$\therefore$ $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.
$\therefore$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$.

▨

KOKUYO