5/15

連続関数

◎ 連続関数 (p.23)

<u>定義</u> (1) 関数 $f(x)$: 点 a およびその近傍で定義されている.
$f(x)$ が <u>点 $x=a$ において連続</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. ☒

(2) $f(x)$: 区間 I で定義されている.
$f(x)$ が <u>I において連続</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f は I の任意の点において連続. ☒

☆ 点 a が区間 I の端点であるときは,「片側からの極限」のみを考える.

$I = [a, b]$ のとき.
- $f(x)$ は $x=a$ で(右)連続 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$.
- $f(x)$ は $x=b$ で(左)連続 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\lim_{x\to b-0} f(x) = f(b)$.

◎ 連続関数の性質.

<u>定理 1.11</u> (p.23) 関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x=a$ において連続のとき. 以下が成り立つ.

(1) $f(x) \pm g(x)$ は $x=a$ において連続.

(2) $c \in \mathbb{R}$ のとき. $cf(x)$ は $x=a$ において連続.

(3) $f(x)\,g(x)$ は $x=a$ において連続.

(4) $g(a) \neq 0$ のとき. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $x=a$ において連続. ☒

<u>定理 1.10</u> (p.23) (1) 関数 $f(x)$ が $x=a$ において連続. 関数 $g(y)$ が $y=f(a)$ において連続 $\Longrightarrow$ 合成関数 $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ は $x=a$ において連続.

(2) 関数 $y=f(x)$ が区間 I において連続，関数 $g(y)$ が f の値域を含む区間において連続
$\Rightarrow$ 合成関数 $(g \circ f)(x)$ は I において連続. ▨

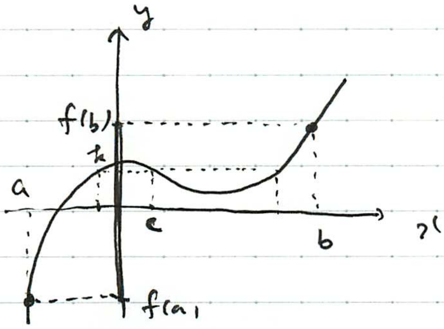
▨ 閉区間における連続関数の性質. (p.24)

(1) 中間値の定理

<u>定理 1.12</u> (中間値の定理) (p.24)

$f(x)$: 閉区間 $[a, b]$ において連続， $f(a) \neq f(b)$.

$\Rightarrow$ $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の数 k に対して
$\exists c \in (a, b)$ s.t. $f(c) = k$.



▨

(2) 最大値，最小値の存在.

<u>定義</u> 関数 $f(x)$: 区間 I で定義されている.
f が I において最大値（最小値）をもつ
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ I における f の値域 $\{f(x) \mid x \in I\}$ が，（$\mathbb{R}$ の部分集合として）最大値（最小値）をもつ. ▨

<u>定理 1.13</u> (最大値，最小値の存在) (p.24)

$f(x)$: $I=[a, b]$ において連続.

$\Rightarrow$ $f(x)$ は I において最大値と最小値をもつ. ▨

(3) 一様連続性 (p.24) は後で.

NO. 25

DATE 5 · 4 · 2012

▨ 単調な連続関数の逆関数.

定理 1.25 (p. 26) 関数 $y=f(x)$ が $I=[a,b]$ において単調のとき. 次が成り立つ.

(1) f は 1対1.

(2) さらに f が I において連続ならば. 閉区間 $J=[f(a), f(b)]$ を定義域とする逆関数 f^{-1} が存在し. f^{-1} は J において連続. ▨

初等関数 (p.26)

◎ 関数の組み合わせ

$f(x)$: 定義域 I , $g(x)$: 定義域 J .
このとき, f と g を組み合わせて新しい関数を作る方法
(カッコ内は新しく作られた関数の定義域)

(1) 線形結合: $k, l \in \mathbb{R}$ に対し, $k f(x) + l g(x)$
$(I \cap J)$

(2) 積: $f(x)\,g(x)$ $(I \cap J)$

(3) 商: $f(x)/g(x)$ $(\{x \in I \cap J \mid g(x) \neq 0\})$

(4) 合成: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. $(\{x \in I \mid g(x) \in J\})$.

◎ 初等関数.

次の6種の「基本関数」に,上の組み合わせ(1)-(4)を有限回ほどこして得られる関数を初等関数という.

(1) 定数関数 $y = c$ $(c \in \mathbb{R})$.

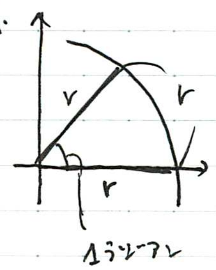
(2) べき関数 $y = x^{\alpha}$ (α は定数)

(3) 指数関数 $y = e^{x}$.

(4) 対数関数 $y = \log x$.

(5) 三角関数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$
(角度は弧度法(ラジアン)を用いる).

ラジアンの定義.



1ラジアン
=半径 r の円周上で,長さ r の円弧を切り取る2本の半径がなす角の値.

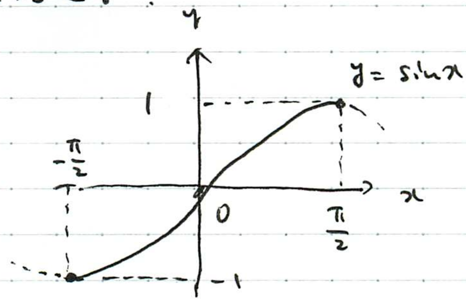
(6) 逆三角関数 $y = \mathrm{Arc}\sin x$, $y = \mathrm{Arc}\cos x$, $y = \mathrm{Arc}\tan x$

5限.

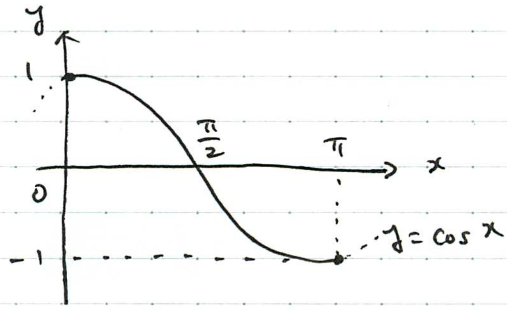
◎ 逆三角関数.

定義域を制限した三角関数を考える.

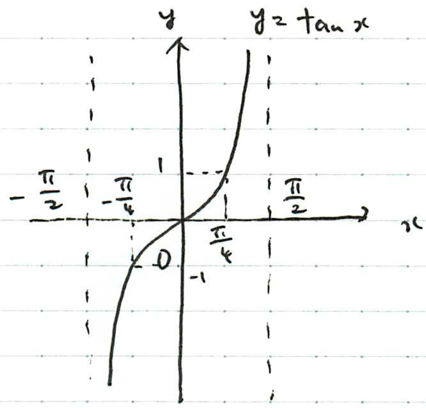
(1) $\sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$



(2) $\cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$



(3) $\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$



これらはすべて1対1関数なので逆関数をもつ.

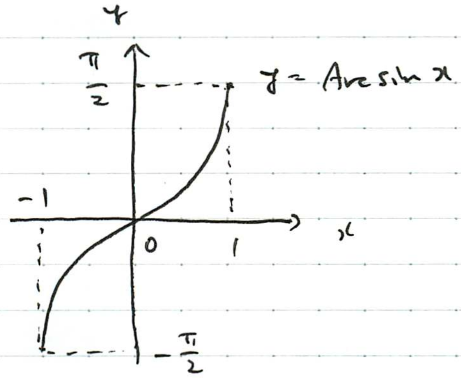
		名前	定義域	値域
$\sin x$ の逆関数	:	$\mathrm{Arcsin}\, x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos x$ ――――	:	$\mathrm{Arccos}\, x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan x$ ――――	:	$\mathrm{Arctan}\, x$	$(-\infty, \infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

NO. 28
DATE 5・4・2012

★逆三角関数の定義域・値域とグラフ.

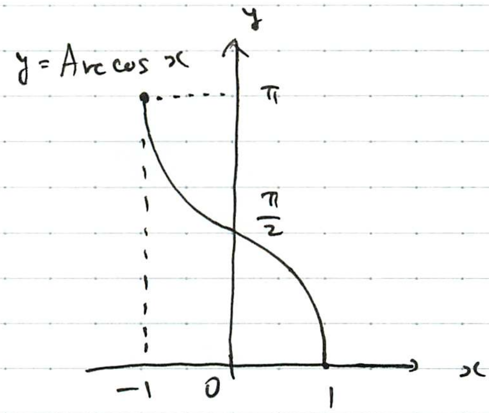
(1) $\mathrm{Arcsin}\,x$

定義域 $[-1, 1]$
値域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



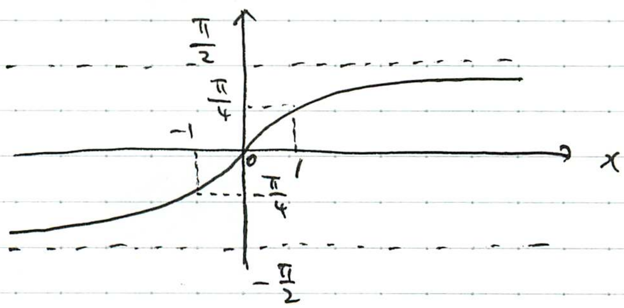
(2) $\mathrm{Arccos}\,x$

定義域 $[-1, 1]$
値域 $[0, \pi]$



(3) $\mathrm{Arctan}\,x$

定義域 $(-\infty, \infty)$
値域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



<u>注意1.1</u> (p. 31)　$\sin(\mathrm{Arcsin}\,x) = x$ は常に正しいが．$\mathrm{Arcsin}(\sin x) = x$ が成り立つのは $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のときに限る．

$\mathrm{Arccos}(\cos x) = x$，$\mathrm{Arctan}(\tan x) = x$ についても同様．

NO. 29

DATE 5 4 2012

⑨ 双曲線関数.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ （双曲正弦，ハイパーボリックサイン）

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$ （双曲余弦，ハイパーボリックコサイン）

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$ （双曲正接，ハイパーボリックタンジェント）

第2章：微分法

微分係数と導関数

◎ 微分の定義

定義 (p.33) 関数 $y = f(x)$: $I = (\alpha, \beta)$ $(\alpha < a < \beta)$ において定義。
このとき、f が点 $x = a$ $(a \in I)$ において微分可能である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 極限値 $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在する。

このとき、この値を $f'(a)$ で表し、f の点 $x = a$ における**微分係数**という。 □

定義 (p.33) (1) f が開区間 I において微分可能である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f が I の各点において微分可能。 □

(2) f が開区間 I において微分可能であるとき、I において関数 f' を

ダッシュ、プライム

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

により定める。この関数 f' を f の**導関数**という。 □

定義 (右微分、左微分) (p.36)

(1) 微分係数の定義式において、右(左)側からの極限におきかえた極限値

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \left(\lim_{h \to -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

が存在するとき、f は点において**右(左)微分可能である**といい、この極限値を f の点 $x = a$ における**右(左)微分係数**という。

(2) f が I において右(左)微分可能であるとき、関数 f'_+ (f'_-) を導関数 $f'(x)$ と同様に定める。この関数 f'_+ (f'_-) を f の**右導関数**(**左導関数**)という。 □

★「fは点aにおいて微分可能」

⇔「fが点aにおいて右/左の微分係数を持ち，その値が一致する」

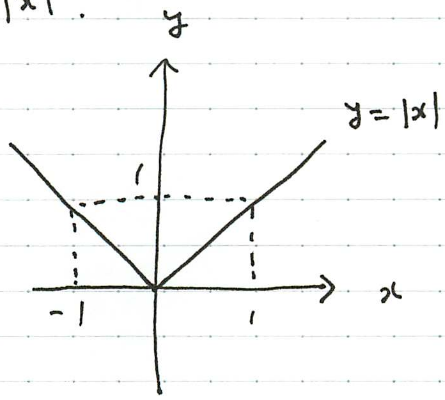
例 2.1 (p. 37) (1) $f(x) = |x|$.

$f(x)$は$x=0$において連続.

しかし，

$f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0)$

より．$f(x)$は$x=0$において微分可能ではない.



◎ 微分可能性.

定理 2.1 (p. 35) 関数$y=f(x)$が点$x=a$において微分可能

⇔ 次の①,②をみたす定数Aと関数$\varphi(t)$が存在する.

① $\varphi(t)$は$t=0$の近傍で定義されていて，

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t} = 0,\quad \varphi(0)=0$$ をみたす.

② 十分小さな$\delta>0$が存在して．$|\Delta x|<\delta$をみたすすべてのΔxに対して

$$f(a+\Delta x) = f(a) + A\Delta x + \varphi(\Delta x)$$

が成り立つ.

さらにこのとき．$A = f'(a)$が成り立つ. ☒

その表現. $y=f(x)$が$x=a$において微分可能.

⇔ $h\to 0$のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \longrightarrow f'(a)$.

よって $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + R(h)$ かつ $\lim_{h\to 0} R(h) = 0$

をみたす関数 $R(h)$ が存在する!

と表すことができる。
このとき、両辺を h 倍すると

$$f(a+h)-f(a) = hf'(a) + hR(h)$$

$$\therefore \quad f(a+h) = f(a) + hf'(a) + r(h).$$

ここで $r(h) = hR(h)$. $\lim_{h\to 0} R(h) = 0$ より

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

$r(h)$ は、$\lim_{h\to 0} r(h) = 0$ をみたし かつ $h\to 0$ のとき、h よりもずっと"速く" 0 に近づく。

∴ $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとは、h が十分小さいとき、

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + r(h)$$

hの1次式(直線)でfを近似

残りは h の1次式よりもさらに微小な量で表される。

と表せること。

微小量(を含む量)のより詳細な比較はランダウの o 記号にて。

5/15

5/22

定理 2.2 (p.36) 関数 $y=f(x)$ が点 $x=a$ において微分可能ならば、$x=a$ において連続。 ☒

☆ 逆は成り立つとは限らない点に注意。