6/5

◎ 剰余項 R_n.

定理 2.19 の (1) 式において

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n}_{\parallel \atop R_n} \quad (4)$$

で表される R_n を ラグランジュ (Lagrange) の 剰余項 という.

その他の R_n の表し方として. コーシー (Cauchy) の 剰余項 や ロッシュ (Roche) の 剰余項 などがある. (p.66)

◎ Taylor の 定理の 言いかえ.

「平均値の定理の言いかえ」と同様.

定理 2.20 (p.66) $f(x)$: 点 a を含む開区間 J において n回 微分可能.

$\Rightarrow$ $\forall x \in J$ に対し, ある θ $(0<\theta<1)$ が存在して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \quad (5)$$

が成り立つ. ▨

◎ Taylor (級数) 展開. (p.75)

$f(x)$ と 点 a を含む開区間 J において, $\forall x \in J$ に対し,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \longrightarrow f(x) \quad (n \to \infty) \quad (6)$$

が成り立つとき, $f(x)$ は $x=a$ のまわりで Taylor (級数) 展開可能 であるという. これとき, (無限)級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (7)$$

を, $f(x)$ の 点 $x=a$ のまわりでの Taylor (級数) 展開 という.

☆ 教科書では, Taylor の定理の (1) 式 を「Taylor 展開」と呼び$\underbrace{}_{(p.67)}$, 上の (7) 式を「Taylor 級数展開」(p.75) と呼んでいるが, 他の 教科書では, 「Taylor 展開」というと, 上の (7) 式を指すものもあるので 注意.
教科書によっては, 上の (6) 式の 第 n 部分和 ($(x-a)^n$ までの項の展開) を, 「$f(x)$ の $x=a$ における n 次の Taylor 多項式」と呼んでいるものもある (*).

(*) M. Spivak. Calculus (3rd Ed.). Cambridge University Press, 2006.

◎ Maclaurin (マクローリン) の定理, Maclaurin (級数) 展開

$\underbrace{\text{Taylor の定理において, } x=0 \text{ とおいたもの}}_{\text{の言いかえ (定理 2.20)}}$ を
「Maclaurin の定理」と呼ぶ. (p.67)

また, (7) 式の Taylor (級数) 展開 において, $x=0$ とおいたものを「Maclaurin (級数) 展開」と呼ぶ.

漸近展開 (p.72)

与えられた関数 f を. $x=a$ の近傍で級数展開し. f のふるまいを調べる.

定理 2.23 (p.72) $f(x)$: $x=a$ を含む開区間 J において C^n 級.

($\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f は n 回微分可能. かつ $f^{(n)}(x)$ が連続).

$\Rightarrow$ $x \to a$ のとき.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right). \qquad (2.50)$$

Proof f は C^n 級より n 回微分可能. よって Taylor の定理より
ある $0<\theta<1$ が存在して

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{(x-a)^n}{n!}\left(f^{(n)}(a+\theta(x-a)) - f^{(n)}(a)\right)}_{=\,\varphi_n(x)}. \end{aligned}$$

$\varphi_n(x)$ とおく.

$\varphi_n(x) = o\left((x-a)^n\right)$ $(x \to a)$. すなわち $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\varphi_n(x)}{(x-a)^n} = 0$ を示せばよい.

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!}\left\{ f^{(n)}(a+\theta(x-a)) - f^{(n)}(a) \right\}.$$

f は C^n 級より $f^{(n)}(x)$ は連続. よって

もし $(a+\theta(x-a)) \to a$ $(x\to a)$ ならば $f^{(n)}(a+\theta(x-a)) \to f^{(n)}(a)$ $(x \to a)$.

$\Rightarrow$ $f^{(n)}(a+\theta(x-a)) - f^{(n)}(a) \to 0$ $(x\to a)$ が成り立つ.

そこで. $\displaystyle\lim_{x\to a}(a+\theta(x-a)) = a$ を示す.

$0<\theta<1$ より $|\theta|<1$. よって

$|a+\theta(x-a) - a| = |\theta(x-a)| = |\theta||x-a| < |x-a| \to 0$ $(x\to a)$

したがって $\varphi_n(x) = o\left((x-a)^n\right)$ $(x\to a)$. ☒

注意 2.5　f が $x=a$ を含む開区間 J で C^∞ 級ならば，
(2.50) が任意の n に対して成り立つ．このとき

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (x \to a) \quad (2.52)$$

と書いて，$x \to a$ における $f(x)$ の漸近展開と呼ぶことがある．

☆以下の点に注意！
- Taylor（級数）展開のような収束が保証されているわけではない．
- (2.52) 上の式の両辺が等しくなるというわけではない．
- $x \to a$（a の近傍のみ）において成り立つ．▨

▨ 基本的な関数の $x \to 0$ における漸近展開．
（例 2.6）

(1) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

(2) $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$.

(3) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$.

(4) $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$.
$(\alpha \in \mathbb{R})$.

☆ $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!},$$

$$\binom{\alpha}{0} := 1$$

と定める．

L 4限

1−5限

⑪ 不定形の極限の計算．

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, ?$$ のような場合．

漸近展開を用いて極限を正しく計算する．

命題 (oの記号の計算規則) (pp. 39−40)

m, n : 0以上の整数．

(o-4) $m \le n$ ならば $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m) \quad (x\to 0)$.

(o-5) $x^m\, o(x^n) = o(x^{m+n}) \quad (x\to 0)$

(o-6) $o(x^n)\cdot o(x^m) = o(x^{m+n}) \quad (x\to 0)$.

(o-7) $m \le n$ ならば $\dfrac{o(x^n)}{x^m} = o(x^{n-m}) \quad (x\to 0)$.
(追加)

Proof (o-4) $f(x) = o(x^m)$, $g(x) = o(x^n) \quad (x\to 0)$ とすると．

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m} = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n} = 0.$$

このとき $$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^m} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n}\cdot(x^{n-m}) = 0 \text{ より}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x^m} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m} + \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n}\cdot(x^{n-m}) = 0.$$

(o-5) $f(x) = o(x^n) \quad (x\to 0)$ とすると $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = 0$.

このとき．$$\lim_{x\to 0}\frac{x^m f(x)}{x^{m+n}} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

(o-6) $f(x) = o(x^m)$．$g(x) = o(x^n) \quad (x\to 0)$ とすると．

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m} = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n} = 0.$$

このとき．$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^{m+n}} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m}\cdot\frac{g(x)}{x^n}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n}\right) = 0.$$

(o-7) $f(x) = o(x^n)$ $(x \to 0)$ とする. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$.

これより. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)}{x^m}}{x^{n-m}} = \frac{f(x)}{x^m \cdot x^{n-m}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$. ■

<u>例1</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = ?$

$\sin x$ の $x \to 0$ における 4次までの漸近展開:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

したがって

$$\frac{1}{x^3}(\sin x - x) = \frac{1}{x^3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x\right)$$

$$= -\frac{1}{6} + o(x) \longrightarrow -\frac{1}{6} \quad (x \to 0).$$ ■

<u>例2</u> (例2.7, (p.74)) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x e^x + x^2 \cos x}{x(1-\cos x)} = ?$

分母 $\cos x$ の $x \to 0$ における漸近展開:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \quad \text{より}$$

$$x(1-\cos x) = x\left(\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^4).$$

分子 3次までの漸近展開を求める.

$$\begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4). \\ x e^x = x\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) = x + x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + o(x^3). \\ x^2 \cos x = x^2(1 + o(x)) = x^2 + o(x^3) \end{cases}$$

より

$$\sin x - x e^x + x^2 \cos x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) - \left(x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\right)$$
$$+ (x^2 + o(x^3)) = \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3 + o(x^3) = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

したがって

$$\frac{\sin x - xe^{x} + x^{2}\cos x}{x(1-\cos x)} = \frac{-\frac{2}{3}x^{3} + o(x^{3})}{\frac{1}{2}x^{3} + o(x^{4})} = \frac{-\frac{2}{3} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(x)}$$

$$\longrightarrow \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3} \quad (x \to 0).$$

∎

例3 (例 2.8 (p.74)). $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = ?$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}.$$

$\log(1+x) = x - \frac{x^{2}}{2} + o(x^{2})$ より $\frac{1}{x}\log(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ $(x\to 0)$.

そこで、$\varphi(x) = \frac{1}{x}\log(1+x) - 1$ とおくと、

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{1+\varphi(x)} = e\cdot e^{\varphi(x)}$. かつ

$\varphi(x) = -\frac{x}{2} + o(x)$ $(x\to 0)$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0$.

($e^{\varphi(x)}$ の漸近展開を行う際は、$x\to 0$ のとき $\varphi(x)\to 0$ になることを確かめる必要がある)

e^{x} の漸近展開は $e^{x} = 1 + x + o(x)$

より、x に $\varphi(x)$ を代入すると

$$e^{\varphi(x)} = 1 + \underset{\substack{\| \\ -\frac{x}{2}+o(x)}}{\underline{\varphi(x)}} + \underline{o(\varphi(x))} \quad (x\to 0).$$

この項をどう評価するか!?

そもそも $o(x)$ だったので、これを $\psi(x)$ とおくと、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\psi(x)}{x} = 0$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\psi(\overset{\nearrow 0}{\varphi(x)})}{x} = 0$. ∴ $\psi(\varphi(x)) = o(x)$ $(x\to 0)$.

ゆえに $e^{\varphi(x)} = 1 - \frac{x}{2} + o(x) \quad (x \to 0)$.

以上より

$$\frac{1}{x}\left\{(1+x)^{1/x} - e\right\} = \frac{1}{x}\left(e \cdot e^{\varphi(x)} - e\right)$$

$$= \frac{e}{x}\left(e^{\varphi(x)} - 1\right) = \frac{e}{x}\left(1 - \frac{x}{2} + o(x) - 1\right)$$

$$= \frac{e}{x}\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) = e\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) = -\frac{e}{2} \quad (x \to 0).$$

◎ 微分法（第2章）で扱いきれなかった内容．

- Cauchy（コーシー）の平均値定理（定理 2.12 (p.56)）
- L'Hospital（ロピタル）の定理（pp. 60 − 64）
- 関数の凹凸と極値の判定（pp. 70 − 72）

6/5