6/12

第3章：積分法．

積分学のおいたち

◎ 高校での積分の学び方．

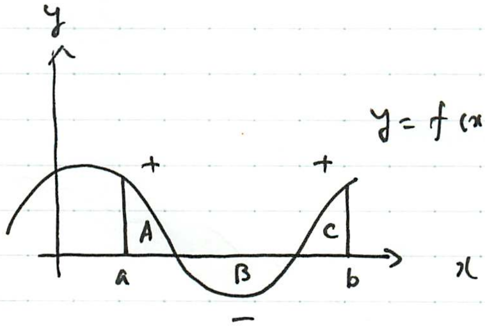
(1) $f(x)$ に対し，「微分すると $f(x)$ になる関数」を $f(x)$ の原始関数と呼び，$\int f(x)\,dx$ で表す（不定積分）．

(2) $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数の一つのとき，$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ で定める（定積分）．

(3) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ （当たり前じゃん！）

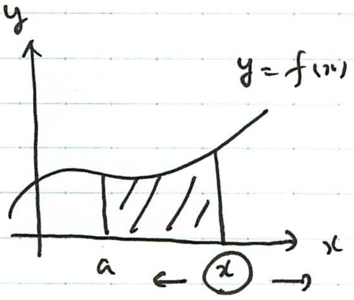
◎ ところが，歴史的には逆の道順をたどった積分学の成立過程．

(1) 定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を「符号つきの」面積として定義．



$$\int_a^b f(x)\,dx = (\text{Aの面積}) - (\text{Bの面積}) + (\text{Cの面積}).$$

(2)



定積分の片側の端点を変数 x で表すと，積分によって求まる面積が x の関数になる．

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x).$$

→ 不定積分．

(3) このとき. $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ が成り立つ.

. 従って.

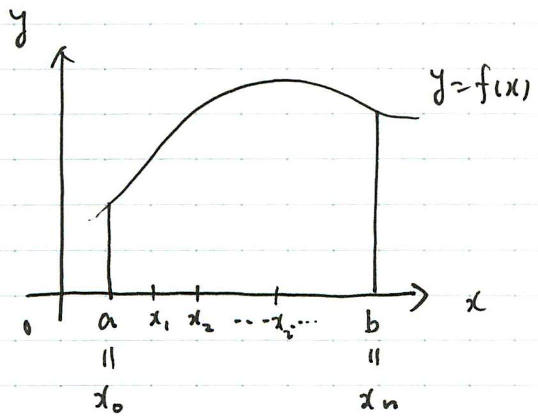
定積分は原始関数を用いて

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ で計算できる!

$\boxed{\text{微積分学の基本定理}}$.

$\boxed{\text{Riemann 積分 (リーマン)}}$

● Riemann 和.



$\boxed{\text{分割}}$ $[a,b]$ を n 個の小区間

$[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …,

$[x_{n-1}, x_n]$ に分ける.

これを $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^{n}$.

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ で表す.

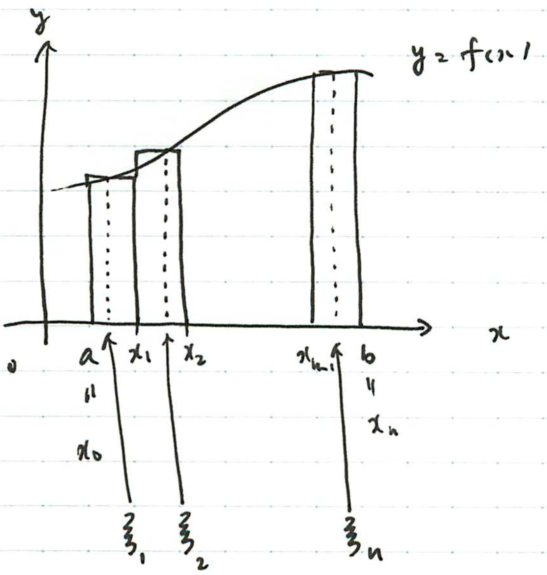
x_i : $\boxed{\text{分点}}$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i=1, \ldots, n)$.

等間隔でなくてもよい.

$|\Delta| = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$: 分割 Δ の $\boxed{\text{幅}}$, $\boxed{\text{メッシュサイズ}}$.

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ から任意の点を選ぶ.



$$\boxed{S(f;\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

分割 Δ に付随する

f の Riemann 和.

★ <u>Riemann 積分可能性</u>の定義はここでは省略.

(詳しくは3学期). (§3.7)

<u>定理 3.13</u> (p. 105) 関数 $f(x)$ が閉区間 $I=[a,b]$ において Riemann 積分可能

$\Rightarrow$ I の分割 Δ に付随する f の Riemann 和について

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

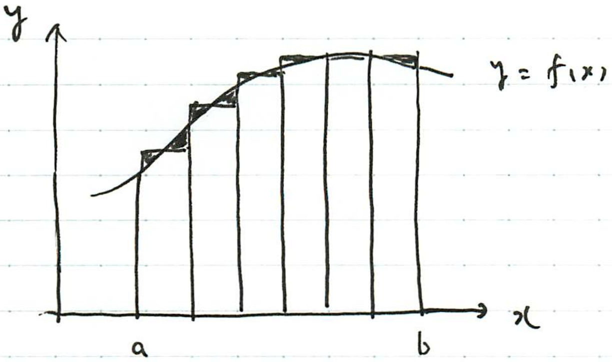
が成り立つ.

(f の Riemann 和は, メッシュサイズをどんどん小さくしていったときに極限値が存在し, その値は $\int_a^b f(x)\,dx$ に等しい.) ∎

⑩ Riemann 積分可能な関数の例.

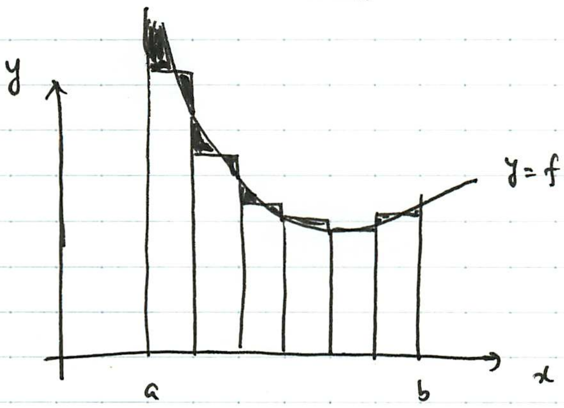
(1) 連続関数. (定理 3.14 (p.106))

☆ 一様連続性 (定理 1.14 (p.25)).



$I = [a, b]$

f(x) が I で積分可能であるためには、ある分割Δで近似した面積と、真の面積との差が、分割を小さくするにつれ応じて「一様に」小さくなる必要がある.



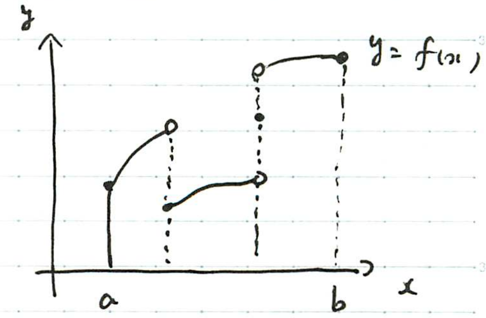
左図のように、f(x) が $x=a$ で有界でないような場合は、分割Δをいくら小さくしても、Δで近似した面積の真の面積からの差が「一様に小さくならない」ような部分が存在する ($x=a$ の近傍).

(2) 区分的に連続な関数. (p.108)

def ⟺ I: 有界閉区間上の関数 f(x) が区分的に連続

- 不連続点が高々有限個しかない
- 各々の不連続点 x_0 において

右極限 $f(x_0+0)$
左極限 $f(x_0-0)$
がそれぞれ存在.



(3) 単調関数 (定理 3.15 (p.107))

定積分の基本的性質

定理 3.1 (p.80)　$a<c<b$ とする．このとき

(1) $f(x)$ は $[a,b]$ で積分可能 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ は $[a,c]$ および $[c,b]$ で積分可能．

(2) $f(x)$ が $[a,b]$ で積分可能ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

が成り立つ．　$\blacksquare$

4限

5限 **記法**　積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ はまず $a<b$ の場合に対して定義されるものであるが，定理 3.1 が $a<c<b$ のときに限らず一般の場合にも成り立つようにするために，積分に以下の定義を加える：

$a<b$ のとき　$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$．

$\int_a^a f(x) = 0$．　$\blacksquare$

定理 3.4 (線形性)　(p.84)

(1) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$ (複号同順)．

(2) $\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$．　($c$：定数)．　$\blacksquare$

定理 3.6 (不等式)　(p.85)　$a<b$．

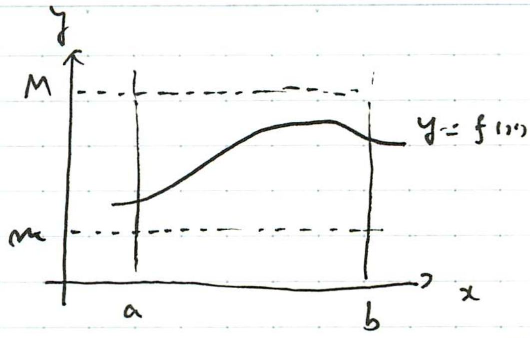
(1) $f(x) \geqq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$．

(2) $f(x) \geqq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$．

(3) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$．

(4) $m \leqq f(x) \leqq M$ $(a \leqq x \leqq b)$ のとき．

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)M.$$



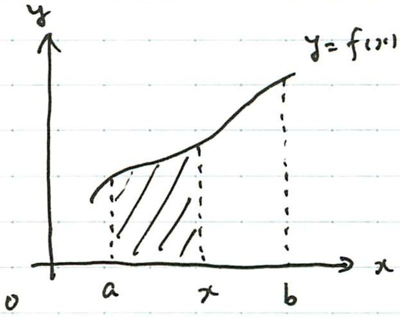
$\boxtimes$

微積分学の基本定理

▨ 不定積分と原始関数

<u>定理</u>　$f(x)$: $[a, b]$ で積分可能のとき，$[a, b]$ 上の関数 $F(x)$ を次式で定義する：

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du . \qquad (1)$$



このとき，$F(x)$ は $[a, b]$ で連続．

▨

<u>定義</u>（不定積分）(p.80)　式(1)で定義される $F(x)$ を f の <u>不定積分</u> という．▨

<u>定義</u>（原始関数）(p.82)　区間 I 上で与えられた関数 $f(x)$ に対し，

$$F'(x) = f(x)$$

をみたす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の <u>原始関数</u> といい，

$\int f(x)\,dx$ で表す．

<u>注意</u>

・　与えられた $f(x)$ に対し，f の原始関数は たくさん存在する．f の原始関数の一つを $F(x)$ とすると，一般の原始関数 $G(x)$ は

$$G(x) = F(x) + C \qquad (C : 定数)$$

と表される．

⑪ 微積分学の基本定理.

定理 3.2 (微積分学の第1基本定理) (p.81)

$f(x)$: $[a, b]$ で積分可能.

$F(x) = \int_a^x f(u)\,du$. (F は $[a,b]$ で定義される).

このとき, $f(x)$ が $c \in [a,b]$ で連続ならば, $F(x)$ は $x=c$ で微分可能で, $F'(c) = f(c)$ が成り立つ.

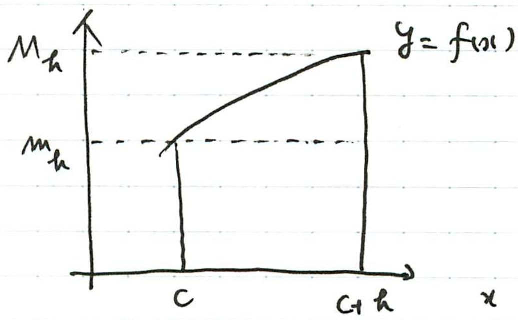
($c=a$ のとき: 右微分可能.
$c=b$ のとき: 左微分可能.)

Proof の一部: $a < c < b$, $h > 0$ とする.
(右微分のみ示す)

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c) \text{ を示す.}$$

$$
\begin{aligned}
F(c+h) - F(c) &= \int_a^{c+h} f(u)\,du - \int_a^{c} f(u)\,du \\
&= \int_c^{a} f(u)\,du + \int_a^{c+h} f(u)\,du \\
&= \int_c^{c+h} f(u)\,du.
\end{aligned}
$$

定積分の性質より.



$$m_h = \inf_{c \le x \le c+h} f(x),$$

$$M_h = \sup_{c \le x \le c+h} f(x)$$

とおくと.

$$h \cdot m_h \le \int_c^{c+h} f(u)\,du \le h \cdot M_h$$

ゆえに $$m_h \le \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \le M_h.$$

$f(x)$ は $x=c$ において連続だから. $\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} M_h = f(c)$.

したがって，はさみうちの原理により

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c).$$

□

__注意__

・定理3.2より，$f(x)$が連続関数ならば，その不定積分 $\int_a^x f(x)\,dx$ は f の原始関数の一つである．

・よって，この場合，f の一般の原始関数は

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(u)\,du + C \quad (C\text{は積分定数})$$

で与えられる．しばしば「不定積分」と「原始関数」を同義語として扱う．

__定理3.3__ （微積分学の基本公式） (p.84)

$f(x)$: $[a,b]$ で連続．
$F(x)$: f の原始関数の一つ
のとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

が成り立つ．

Proof) $\underbrace{G(x) = \int_a^x f(u)\,du}_{f\text{の不定積分}}$ は f の原始関数の一つであるから，$G'(x) = f(x) = F'(x)$．すると，ある定数 C が存在して $G(x) = F(x) + C$ が成り立つ．

$G(a) = F(a) + C = \int_a^a f(u)\,du = 0$ より $C = -F(a)$．

ゆえに $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$．

□

定理（微積分学の第2基本定理）

$f(x)$: $[a, b]$ で積分可能.

$F(x)$: $[a, b]$ で $F'(x) = f(x)$.（Fはfの原始関数）.

このとき, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

が成り立つ.

・fの連続性を仮定しなくてもok. ∎

記法 上の定理の $F(b) - F(a)$ を $\left[F(x) \right]_a^b$

もしくは $F(x) \Big|_a^b$ と表す.（$F(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$ のように代入する変数を明記する場合もある.）