NO. 72

DATE 11 JUN 2012

6/19

基本的な不定積分

以下，積分定数は省略．

◎ 初等関数の不定積分（特に大学で初めて登場するもの）

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{Arctan}\, x, \quad \int \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arc\,tan}\,\frac{x}{a} \quad (a>0).$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{Arc\,sin}\, x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \mathrm{Arc\,sin}\,\frac{x}{a} \quad (a>0).$$

定理 3.8 (p. 88) a, b : 定数．$a \neq 0$ とする．

$\int f(x)\,dx = F(x)$ のとき．$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$.

◎ その他の公式．

① $$\int f'(x)\{f(x)\}^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha+1}. \quad (\alpha \neq -1).$$

② $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|.$$

置換積分と部分積分

◎ 置換積分

定理 3.9 (置換積分法) (p.89)

$\varphi(t)$: C^1 級. (連続な導関数をもつ).
$f(x)$: $\varphi(t)$ の値域において連続.

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx .$$

(Proof) $F(x) = \int f(x)\,dx$, $G(t) = F(\varphi(t))$ とおく.

このとき. $G'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ より
$G(t) = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

ゆえに $\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = G(b) - G(a)$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx .$$

□

◎ 部分積分

定理 3.11 (部分積分法) (p.92)

f, g が C^1 級のとき,

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx . \quad \cdots (3.9)$$

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx . \quad \cdots (3.10)$$

(Proof) $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ より.

$$f(x)\,g(x) = \int (f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x))\,dx$$

$$= \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx .$$

これを移項することで (3.9) 式を得る.
また、(3.10) 式も、微積分学の基本公式より

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \right) dx$$

$$= \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

を移項することより得る.

⑪ 部分積分の使い方 (例)

(1) $g' = 1$ とみなす.

(例 3.6)

$$\int \log x\,dx = \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\log x}_{f}\,dx$$

$$= \underbrace{x}_{g}\,\underbrace{\log x}_{f} - \int \underbrace{x}_{g} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{f'} dx$$

$$= x \log x - x.$$

(例 3.7), (例 3.8).

(2) $\int h\,dx$ に対して部分積分を行い、再び $\int h\,dx$ の項が現われる。これを $\int h\,dx$ の方程式とみなして $\int h\,dx$ について解く.

(例 1)

$$\boxed{\int \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{g'} \underbrace{\log x}_{f}\,dx} = \underbrace{\log x}_{g} \cdot \underbrace{\log x}_{f} - \boxed{\int \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{f'} \underbrace{\log x}_{g}\,dx}$$

より

$$2\int \left(\frac{1}{x}\right) \log x\,dx = (\log x)^2$$

$$\therefore \int \left(\frac{1}{x}\right) \log x\,dx = \frac{(\log x)^2}{2}.$$

KOKUYO

例2　部分積分を2回繰り返す例.

$$\boxed{\int \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{\sin x}_{g'} dx} = \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{(-\cos x)}_{g} - \int \underbrace{e^x}_{f'} \underbrace{(-\cos x)}_{g} dx$$

$$= -e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} dx$$

$$= -e^x \cos x + \left\{ \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v} - \boxed{\int \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\sin x}_{v} dx} \right\}$$

より

$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\therefore \int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x).$$

(3)　$\int (f(x))^n dx$ の漸化式を利用する例.

① $$\boxed{\int \sin^n x\, dx} = \int \underbrace{(\sin^{n-1} x)}_{f} \underbrace{(\sin x)}_{g'} dx$$

$$= \underbrace{(\sin^{n-1} x)}_{f} \underbrace{(-\cos x)}_{g} - \int \underbrace{(n-1)(\sin^{n-2} x)(\cos x)}_{f'} \underbrace{(-\cos x)}_{g} dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int (\sin^{n-2} x)(1 - \sin^2 x)\, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x\, dx - (n-1) \boxed{\int \sin^n x\, dx}$$

より

$$n \int \sin^n x\, dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x\, dx$$

$$\therefore \int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx.$$

☆　$\sin x$ の指数が下がるので，帰納的にこの操作を繰り返すことにより，積分を計算できる.

② $$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx.$$

③ $$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{1}{2n-2}\,\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx.$$

も ①と同様に導くことができる.

有理関数の不定積分

◎有理関数.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.\quad \begin{cases} p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0. \end{cases}$$

$a_n = b_m = 1$ とする. $n < m$ とする.

4限
5限

($n \geq m$ の場合は, 分子を分母で割ることにより, 分子の次数を下げることができる.

(例) $\dfrac{u^2}{u-1} = u+1 + \dfrac{1}{u-1}$.

$$\begin{array}{r} u+1 \\ u-1\,\overline{)\,u^2 } \\ \underline{u^2-u} \\ u \\ \underline{u-1} \\ 1 \end{array}$$
)

☆有理関数の不定積分は, 有限回の手続きにより, 初等関数の範囲で求めることが可能!
(部分分数分解)

◎有理関数の部分分数分解.

有理関数の部分分数分解は, 以下の事実に基づく.

定理 $q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

は, $q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_k)^{r_k}$
$\times (x^2+\beta_1 x+\delta_1)^{s_1} \cdots (x^2+\beta_\ell x+\delta_\ell)^{s_\ell}$,
$r_1 + \cdots + r_k + 2(s_1 + \cdots + s_\ell) = m$.

という積の形で表される. ▨

↑ q は上のような定義.

代数学の基本定理 代数方程式 $q(x) = 0$ の根(解)は, 重複度も含めて m 個存在する. 根は, 実数根か, 複素数根の組になる.

互いに共役な

定理 $\begin{cases} p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \\ q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0. \\ \quad = (x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_k)^{r_k} \\ \quad \times (x^2+\beta_1 x+\delta_1)^{s_1} \cdots (x^2+\beta_\ell x+\delta_\ell)^{s_\ell}, \end{cases}$

$n < m$ のとき.

$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ は以下の形で表せる.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \left[\frac{a_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{a_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}\right] + \cdots$$
$$+ \left[\frac{a_{k,1}}{(x-\alpha_k)} + \cdots + \frac{a_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\right]$$
$$+ \left[\frac{b_{1,1}x + c_{1,1}}{(x^2+\beta_1 x+\delta_1)} + \cdots + \frac{b_{1,s_1}x + c_{1,s_1}}{(x^2+\beta_1 x+\delta_1)^{s_1}}\right] + \cdots$$
$$+ \left[\frac{b_{\ell,1}x + c_{\ell,1}}{(x^2+\beta_\ell x+\delta_\ell)} + \cdots + \frac{b_{\ell,s_\ell}x + c_{\ell,s_\ell}}{(x^2+\beta_\ell x+\delta_\ell)^{s_\ell}}\right].$$ ☒

◎ 部分分数分解後の各項の積分.

(1) (1-1) $\displaystyle\int \frac{a}{x-\alpha}\,dx = a \cdot \log(x-\alpha).$

(1-2) $\displaystyle\int \frac{a}{(x-\alpha)^r}\,dx = \frac{-a}{(x-\alpha)^{r-1}}\left(\frac{1}{r-1}\right)$ $(r>1)$

(2) (2-1) $\displaystyle\int \frac{c}{(x^2+\beta x+\delta)}\,dx$.

分母を平方完成: $x^2+\beta x+\delta = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \delta.$

$$= \left(-\frac{\beta^2}{4}+\delta\right)\underbrace{\left\{\left(\frac{x+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{-\frac{\beta^2}{4}+\delta}}\right)^2 + 1\right\}}_{「u^2+1」の形にする}.$$

(xの)2次式を
a(xの1次式)^2 + (定数)
の形で表す.

$$u = \frac{x + \frac{\beta}{2}}{\sqrt{-\frac{\beta^2}{4} + \delta}}, \quad du = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\beta^2}{4} + \delta}}.$$

これより　(与式) $= c\left(-\frac{\beta^2}{4}+\delta\right)\displaystyle\int \frac{\sqrt{-\frac{\beta^2}{4}+\delta}}{(u^2+1)}\,du$

$$= c\left(-\frac{\beta^2}{4}+\delta\right)^{3/2} \cdot \mathrm{Arctan}\, u .$$

(2-2) $\displaystyle\int \frac{c}{(x^2+\beta x+\delta)^r}\,dx$.　　$r > 1$.

上と同様にして　(与式) $= c\left(-\frac{\beta^2}{4}+\delta\right)^{3/2} \underbrace{\displaystyle\int \frac{1}{(u^2+1)^r}\,du}$.

⇓

部分積分等を用いて指数を減らす.

(3) (3-1) $\displaystyle\int \frac{bx+c}{x^2+\beta x+\delta}\,dx$.

$u = x^2+\beta x+\delta$.
$u' = 2x+\beta \longrightarrow$ より, 分子を $(2x+\beta)$ + (それ以外) に分ける.

$bx+c = \frac{b}{2}(2x + \beta) + \left(c - \frac{b\beta}{2}\right)$ とおくことができる.

$$\therefore (与式) = \frac{b}{2}\int \frac{(2x+\beta)+\left(c-\frac{b\beta}{2}\right)}{x^2+\beta x+\delta}\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{b}{2}\int \frac{2x+\beta}{x^2+\beta x+\delta}\,dx}_{①} + \underbrace{\frac{b}{2}\int \frac{\left(c-\frac{b\beta}{2}\right)}{x^2+\beta x+\delta}\,dx}_{②}.$$

① $= \log(x^2+\beta x+\delta)$.

② は (2-1) に帰着.

(3-2) $\displaystyle\int \frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\delta)^r}\,dx$. $r>1$.

上と同様にして

$$(与式) = \frac{b}{2}\underbrace{\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\delta)^r}\,dx}_{③} + \frac{b}{2}\underbrace{\int \frac{\left(c-\frac{b\beta}{2}\right)}{(x^2+\beta x+\delta)^r}\,dx}_{④}.$$

$③ = \dfrac{-(r-1)}{(x^2+\beta x+\delta)^{r-1}}$. ④ は (2-2) に帰着.