NO. 1

DATE 9 . 16 . 2015

微積分 II (2015)

10/2

(1)

秋学期の内容

・第4章 : 多変数関数の微分法
偏微分, 全微分, Taylorの定理, 陰関数定理.

・第5章 : 重積分
〃の定義, 性質, 累次積分, 変数変換

・第6章 : 無限級数.

第4章：多変数関数の微分法.

§4.1 $\mathbb{R}^n$ の点集合と多変数関数

それでも、これから定義を与えるので、恐れることはない！

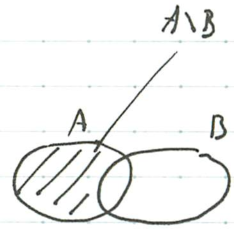
[1] 点集合.

◎ 復習

・$\emptyset$: 空集合.

・A, B : 集合のとき,

差集合 $A \setminus B = \{ a \in A \mid a \notin B \}$.

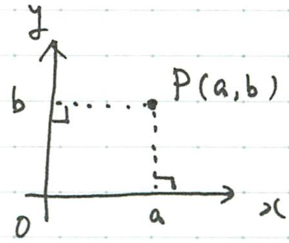


◎ 直交座標系と n次元 Euclid(ユークリッド)空間.

・$\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$\ni$

(a, b) ⟷



↑ ↑

2つの実数の組 (a, b) と、座標平面上の点 P を同一視する.

↓ ↓

関数. ⟷ 直線や曲線.

⟹ 座標平面上の図形を数式や関数に対応させることで、幾何学の性質を代数的に理解する

⟶ $\boxed{\text{解析幾何学}}$

・$\mathbb{R}^3 = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$

(3次元 Euclid 空間)

点と呼ぶ.

・$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$.

(n次元 Euclid 空間)

◎ $\mathbb{R}^n$の距離.

定義 ($\mathbb{R}^n$の距離)

$P = (x_1, \dots, x_n)$, $Q = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ のとき,

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

を P, Q の 距離 という. ▨

例 ($\mathbb{R}^n$の距離の例)

(1) $n = 1$ $(\mathbb{R})$: $x, x' \in \mathbb{R}$ に対し

$$d(x, x') = \sqrt{(x - x')^2} = |x - x'|.$$

(2) $n = 2$ $(\mathbb{R}^2)$: $P = (x, y)$, $Q = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ に対し (2)

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$ ▨

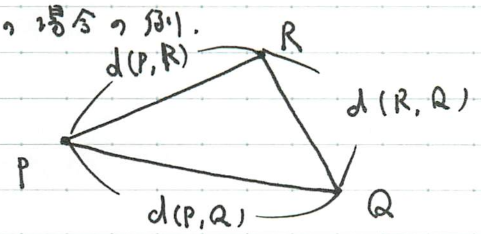
命題 $P, Q, R \in \mathbb{R}^n$.
$\mathbb{R}^n$の距離について, 次が成り立つ.

(1) $d(P, Q) \geqq 0$. $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$.

(2) $d(P, Q) = d(Q, P)$.

(3) $d(P, Q) \leqq d(P, R) + d(R, Q)$.

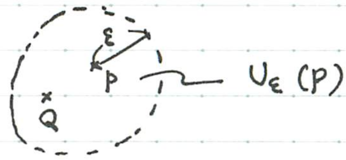
(3) $n = 2$ の場合の例.



▨

以下, $\mathbb{R}^2$ の場合を中心に扱う.

▨ 内点, 外点, 境界点.



定義 (ε-近傍)

P : $\mathbb{R}^n$ の点, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ のとき

$$U_\varepsilon(P) = \{ Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P, Q) < \varepsilon \}$$

(中心 P, 半径 ε の 超球の内部の点全体)

を <u>P の ε-近傍</u> という. ▨

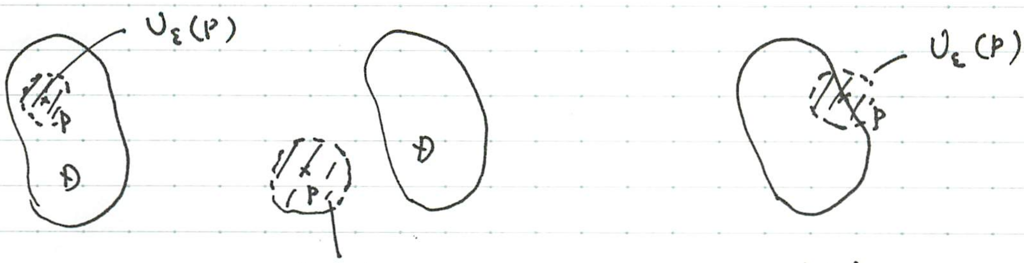
定義 (内点, 外点, 境界点)

$D \subset \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^n$ のとき, D と P に対して次の (a), (b), (c) のうちいずれか1つが成り立つ.

(a) $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U_\varepsilon(P) \subset D$.

(b) $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}^n \setminus D$.

(c) $\forall \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(P) \cap D \neq \emptyset$ かつ $U_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus D) \neq \emptyset$.



(a)　(b)　(c)

(a) ⇒ 点P を D の <u>内点</u>,

(b) ⇒ ＿＿ D の <u>外点</u>,

(c) ⇒ ＿＿ D の <u>境界点</u>

という. ▨

定義 (内部, 境界, 近傍)

$D \subset \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^n$ のとき.

(a) Dの内部 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Dの内点全体からなる集合. : $\mathring{D}$

(b) Dの境界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Dの境界点全体からなる集合. : ∂D.

(c) Pの近傍 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Pを内点として含む集合. ▨

定義 (集積点, 孤立点)

(例) $D=(0,1) \subset \mathbb{R}$ のとき. $x=1/2$ は Dの集積点, $x=0$ も 〃 〃

$D \subset \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^n$ のとき.

(a) PはDの集積点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall}\varepsilon>0$ $U_\varepsilon(P) \cap (D \setminus P) \neq \emptyset$.

(b) PはDの孤立点 $\Longleftrightarrow$ ${}^{\exists}\varepsilon>0$ $U_\varepsilon(P) \cap (D \setminus P) = \emptyset$.

▨

◎ 開集合, 閉集合, 閉包

定義 (開集合, 閉集合) $D \subset \mathbb{R}^n$ とする.

(a) Dは開集合 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Dの任意の点はDの内点.

(b) Dは閉集合 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Dは境界 ∂D を含む. ▨

(例) $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ は開集合? 閉集合? → 10/2 宿題

定義 (閉包) $D \subset \mathbb{R}^n$ に対し,

10/9

Dの閉包 $\overset{def}{=}$ $D \cup \partial D$: $\bar{D}$. ▨

命題 $D \subset \mathbb{R}^n$ に対し. 次が成り立つ.

(a) Dが開集合 $\Longleftrightarrow$ $D = \mathring{D}$.

(b) Dが閉集合 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus D$ が開集合.

(c) Dが閉集合 $\Longleftrightarrow$ $\bar{D} = D$.