NO. 5

DATE 9 17 2015

定義 (内部, 境界, 近傍)

$D \subset \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^n$ のとき.

(a) Dの内部 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Dの内点全体からなる集合. : $\mathring{D}$

(b) Dの境界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Dの境界点全体からなる集合. : ∂D.

(c) Pの近傍 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Pを内点として含む集合. ▨

定義 (集積点, 孤立点)

(例) $D = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ のとき.
$x = 1/2$ は D の集積点,
$x = 0$ も 〃 〃

$D \subset \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^n$ のとき.

(a) PはDの<u>集積点</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(P) \cap (D \setminus P) \neq \emptyset$.

(b) PはDの<u>孤立点</u> $\Longleftrightarrow$ ${}^\exists \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(P) \cap (D \setminus P) = \emptyset$.

▨

◎ 開集合, 閉集合, 閉包

定義 (開集合, 閉集合) $D \subset \mathbb{R}^n$ とする.

(a) Dは開集合 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Dの任意の点はDの内点.

(b) Dは閉集合 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Dは境界 ∂D を含む. ▨

(例) $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ は開集合? 閉集合? → 10/2 宿題

定義 (閉包) $D \subset \mathbb{R}^n$. に対し.

10/9

Dの閉包 $\overset{def}{=}$ $D \cup \partial D$: $\bar{D}$. ▨

命題 $D \subset \mathbb{R}^n$ に対し. 次が成り立つ.

(a) Dが開集合 $\Longleftrightarrow$ $D = \mathring{D}$.

(b) Dが閉集合 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus D$ が開集合.

(c) Dが閉集合 $\Longleftrightarrow$ $\bar{D} = D$.

(d) $\mathring{D}$ は開集合.

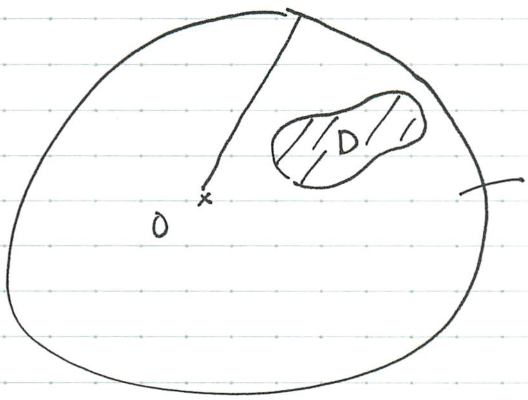
(e) $\overline{D}$ は閉集合.

(f) $\mathbb{R}^n$ と $\emptyset$ は開集合かつ閉集合. ▨

◎ 有界

<u>定義</u> (有界)

$D \subset \mathbb{R}^n$ が有界 $\overset{\text{def}}{\iff}$ O: $\mathbb{R}^n$ の原点.
$\exists r > 0$ s.t. $D \subset U_r(O)$.



▨

[2] 極限値と連続関数.

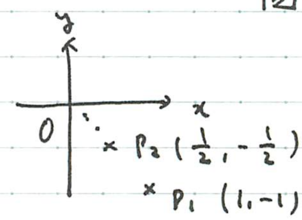
◎ 点列の収束.
<u>定義</u> (点列)
$\{P_j\}_{j=1}^{\infty} = \{P_1, P_2, \ldots\} = \{P_j = (x_{1j}, \ldots, x_{nj}) \in \mathbb{R}^n \mid j = 1, 2, \ldots\}$

を $\mathbb{R}^n$ の点列という. ▨

<u>定義</u> (点列の収束, 極限点) 点 $A \in \mathbb{R}^n$ に対し,
点列 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ が A に収束する
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $d(P_j, A) \to 0 \quad (j \to \infty)$.

このとき、 $A = \lim_{j \to \infty} P_j$ または $P_j \to A \ (j \to \infty)$
と表し、点 A を点列 $\{P_j\}$ の極限点という。 $\boxtimes$

例1 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$: $P_j = \left(\frac{1}{j}, -\frac{1}{j} \right)$.



$A = (0, 0)$ とすると

$$d(P_j, A) = \sqrt{\left(\frac{1}{j}\right)^2 + \left(-\frac{1}{j}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{j^2}} = \frac{\sqrt{2}}{j} \longrightarrow 0 \ (j \to \infty).$$

ゆえに点列 $\{P_j\}$ は A に収束する。 $\boxtimes$

命題 $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ を $P_j = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ で表すとき、次は同値：

(1) $\lim_{j \to \infty} P_j = A = (a_1, \dots, a_n)$.

(2) $\lim_{j \to \infty} x_1^{(j)} = a_1, \ \dots, \ \lim_{j \to \infty} x_n^{(j)} = a_n$.

Proof (2) $\Rightarrow$ (1).

$$\lim_{j \to \infty} d(P_j, A) = \lim_{j \to \infty} \sqrt{(x_1^{(j)} - a_1)^2 + \cdots + (x_n^{(j)} - a_n)^2}$$

$$\leq \lim_{j \to \infty} \left\{ (x_1^{(j)} - a_1)^2 + \cdots + (x_n^{(j)} - a_n)^2 \right\}$$

$$= \lim_{j \to \infty} (x_1^{(j)} - a_1)^2 + \lim_{j \to \infty} (x_2^{(j)} - a_2)^2 + \cdots + \lim_{j \to \infty} (x_n^{(j)} - a_n)^2$$

$$= 0.$$

(1) $\Rightarrow$ (2). $\forall j$ および $i = 1, \dots, n$ に対し、

$$0 \leq \sqrt{(x_i^{(j)} - a_i)^2} = |x_i^{(j)} - a_i| \leq d(P_j, A).$$

このとき $0 \leq \lim_{j \to \infty} |x_i^{(j)} - a_i| \leq \lim_{j \to \infty} (P_j, A) = 0$ より

$$\lim_{j \to \infty} |x_i^{(j)} - a_i| = 0.$$

$\forall j$ および $i=1,\dots,n$ に対し、

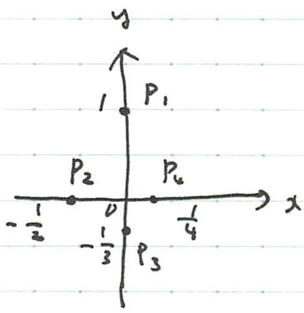
また、$-|x_i^{(j)}-a_i| \le x_i^{(j)}-a_i \le |x_i^{(j)}-a_i|$

かつ $\lim_{j\to\infty} \pm|x_i^{(j)}-a_i| = 0$ より $\lim_{j\to\infty}(x_i^{(j)}-a_i) = 0$. ▨

例2 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$: $P_j = \left(\frac{1}{j}\cos\frac{\pi j}{2}, \frac{1}{j}\sin\frac{\pi j}{2}\right)$.

$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{j}\cos\frac{\pi j}{2} = 0$, $\lim_{j\to\infty}\frac{1}{j}\sin\frac{\pi j}{2} = 0$

より、$P_j \to (0,0)$ $(j\to\infty)$.



☆ 例1の $\{P_j\}$ と同じく原点 $(0,0)$ に収束するが、$(0,0)$ への近づき方が異なることに注意。 ▨

$\boxed{\text{数}}$

命題 (p.127, 問4.3) $D\subset\mathbb{R}^2$. $\{P_j\}$: 点列.

(1) $\{P_j\}\subset D$, $P_j \to A \overset{(j\to\infty)}{\Longrightarrow} A\in\bar{D}$.

(2) 任意の $\{P_j\}\subset D$ に対し、$P_j\to A$ $(j\to\infty)$ かつ $A\in D$

$\Longrightarrow$ D は閉集合. ▨

(2)

◎ 多変数関数

定義 (関数, 定義域, 値域, グラフ)

$D\subset\mathbb{R}^n$.

(1) f が D で定義された関数 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f は、D 上の各点に対し、$\mathbb{R}$ の値をただ1つ対応させる規則.

$$\begin{array}{ccc} f: D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ P & \longmapsto & f(P) \end{array}$$ で表す.

(2) (1)において、D を f の定義域 (domain)、$\underbrace{\{f(P) \mid P\in D\}}_{\subset\mathbb{R}}$ を f の値域 (range) という.

(3) (1) の f と $P=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ に対し, $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合

$$\{(x_1,\dots,x_{n-1},x_n,f(x_1,\dots,x_n))\in\mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1,\dots,x_n)\in D\}$$

を f の グラフ という.

☆ $n=2$ の場合: $f(x,y)$ のグラフは

$$\{(x,y,f(x,y))\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D\}.$$

$z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$ とも表される. ▨

▨ 関数の極限

… 1変数関数の場合と大きく異なるので注意!

例題 (p.128, 例題4.2, (1))

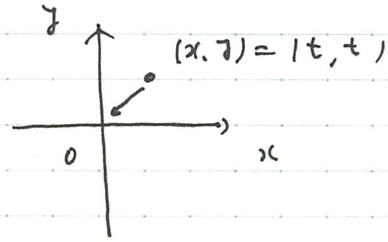
$f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ において, $(x,y)\to(0,0)$ のときの $f(x,y)$ の値のふるまいを調べる.

☆ $(x,y)\to(0,0)$ には様々な近づき方があるのに注意!

(1) 直線 $y=x$ に沿って近づく場合.

$(x,y)=(t,t)$ とおき, $t\to0$ とすればよい.

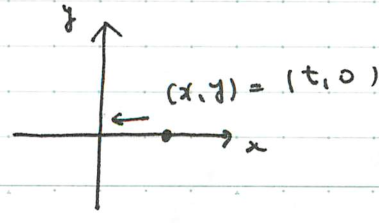
$$f(t,t)=\frac{2t^2}{2t^2}=1\to1 \quad (t\to0).$$



(2) x軸 $(y=0)$ に沿って近づく場合.

$(x,y)=(t,0)$ とおき, $t\to0$ とすればよい.

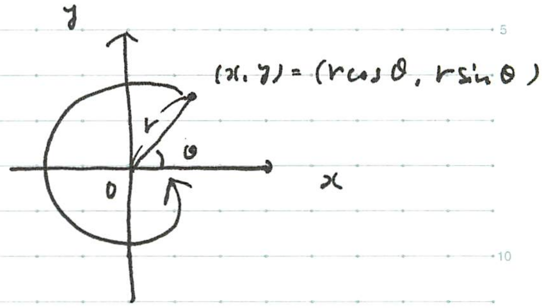
$$f(t,0)=\frac{0}{t^2}=0\to0 \quad (t\to0).$$



(3) 原点の周りを回りながら近づく場合.

$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおいて, $r \to 0$, $\theta \to \infty$ とする.

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \sin 2\theta$$



より, $r \to 0$, $\theta \to \infty$ のとき収束しない.

上の例のように, 多変数関数においては, (x, y) の近づき方によって, $f(x, y)$ の極限値が異なったり, 極限値が存在しない場合もある.

多変数関数の極限値は, (x, y) がどのような近づき方をしても, $f(x, y)$ が一定の値 α に収束する場合に存在する.

定義1 (多変数関数の極限値)

$f: D \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数.

f が D の点 A で極限値 α をもつ

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 点列 $\{P_j\}_{j=0}^{\infty} \subset D$, A と $\{P_j\}$ が…

$P_j \to A \ (j \to \infty) \Rightarrow$ 数列 $\{f(P_j)\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が

$f(P_j) \to \alpha \ (j \to \infty)$ をみたす.

これを

$\lim_{P \to A} f(P) = \alpha$ または $f(P) \to \alpha \ (P \to A)$ と表す.

ε-δ 論法による

定義 2 （定義 1 の言いかえ; p.128, 定理 4.2）

$f : D \subset \mathbb{R}^n$ で定義された関数.

f が D の点 A で極限値 α をもつ

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.t. $P \in D$ かつ $0 < d(A, P) < \delta$
$\Longrightarrow |f(P) - \alpha| < \varepsilon$.

▨

定理 4.1 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ が D の点 A に対し $\lim_{P \to A} f(P) = \alpha$, $\lim_{P \to A} g(P) = \beta$ をみたすとき、次が成り立つ.

(1) $c, d \in \mathbb{R}$ に対し $\lim_{P \to A} \{ c \cdot f(P) + d \cdot g(P) \} = c\alpha + d\beta$.

(2) $\lim_{P \to A} f(P) \cdot g(P) = \alpha\beta$.

(3) $g(P) \neq 0 \ (P \in D)$ かつ $\beta \neq 0$ のとき.

$$\lim_{P \to A} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

▨

例題 （極限値の計算）

(1) 極限値が存在しない場合: 複数の方向から極限値を求め、それらが一致しないことを示す.
（p.128, 例題 4.2 (1)）

(2) 極限値が存在する場合:

a) x と y の絶対値を三角不等式などを用いて上から評価し、α (極限値) に収束することを示す.
（p.128, 例題 4.2 (2)）

b) $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を用いて表し．上界を r のみに依存する形で表し，極限値の存在を示す．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 - y^3 + x^2 + y^2}{x^2+y^2}.$$

・y軸 $(x=0)$ に沿った極限値は $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (-y+1) = 1$.

・x軸 $(y=0)$ 〃 〃 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (2x+1) = 1$.

よって、もし極限値が存在するならば 1．

$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ とおき，$f(x,y)$ と 1 との差を評価する．$(x,y)\to(0,0)$ のとき $r\to 0$ より，

$$\left|\frac{2x^3 - y^3 + x^2 + y^2}{x^2+y^2} - 1\right| = \left|\frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|$$
$$\leq \left|\frac{2r^3\cos^3\theta}{r^2}\right| + \left|\frac{r^3\sin^3\theta}{r^2}\right| \leq 2r + r \longrightarrow 0 \quad (r\to 0).$$

よって極限値は 1. ▨

◎ 連続関数

定義 4.1 教 (p.129) (連続関数)

$D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ のとき．

f が D の点 A において連続 $\overset{\text{def}}{\iff} \displaystyle\lim_{P\to A} f(P) = f(A)$.

f は D において連続 $\overset{\text{def}}{\iff}$ f は D の任意の点において連続． ▨