b) $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を用いて表し、上界を r のみに依存する形で表し、極限値 α の存在を示す。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 - y^3 + x^2 + y^2}{x^2+y^2}.$$

・y 軸 $(x=0)$ に沿った極限値は $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (-y+1) = 1$.

・x 軸 $(y=0)$ 〃 〃 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (2x+1) = 1$.

よって、もし極限値が存在するならば 1.

$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ とおき、$f(x,y)$ と 1 との差を評価する。$(x,y)\to(0,0)$ のとき $r\to 0$ より、

$$\left|\frac{2x^3 - y^3 + x^2 + y^2}{x^2+y^2} - 1\right| = \left|\frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|$$
$$\leq \left|\frac{2r^3\cos^3\theta}{r^2}\right| + \left|\frac{r^3\sin^3\theta}{r^2}\right| \leq 2r + r \to 0 \quad (r\to 0).$$

よって極限値は 1. ▨

10/16

§ 連続関数

定義 4.1 (p.129) (連続関数)

$D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ のとき、

f が D の点 A において連続 $\overset{\text{def}}{\iff} \displaystyle\lim_{P\to A} f(P) = f(A)$.

f は D において連続 $\overset{\text{def}}{\iff}$ f は D の任意の点において連続。 ▨

定理 4.3 教 (p. 129) (連続関数の性質 ①)

$D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R}$, f, g: Dの点Aにおいて連続 } のとき、

次が成り立つ.

(1) $cf + dg = cf(P) + dg(P)$ も Aにおいて連続.

(2) $fg = f(P)g(P)$ も Aにおいて連続.

(3) Aのある近傍 $U \subset D$ が存在して $^\forall P \in U$ $g(P) \neq 0$ ならば、$\dfrac{f}{g}$ も Aにおいて連続.

□

例題 (連続性の判定) fの点Aにおける連続性の判定.

(1) fのAにおける極限値が存在しない場合：
fはAで連続でない.

(2) $f \to \alpha$ $(P \to A)$ の場合：
$f(A) = \alpha$ (Aにおけるfの値と極限値)が一致することを確かめる.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 3x^2y^2}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

の原点 $(0, 0)$ における連続性.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおく. $(x, y) \to (0, 0)$ のとき $r \to 0$ であるから

$$\left| \frac{x^4 - 3x^2y^2}{2x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^4 - 3x^2y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{r^4\cos^4\theta}{r^2} \right| + \left| \frac{3r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2} \right|$$
$$\leq 4r^2 \to 0 = f(0, 0) \quad (r \to 0).$$

よって $f(x, y)$ は原点において連続.

定理 4.4 (図 p.130) (連続関数の性質 ②)

$D \subset \mathbb{R}^n$: 有界閉集合. $f: D \to \mathbb{R}$: 連続関数.
このとき, 次が成り立つ.

(1) f は D において最大値, 最小値をもつ. すなわち
$\exists A, B \in D \quad \forall P \in D \quad f(A) \leq f(P) \leq f(B)$.

□

(2)

§4.2. 偏微分と全微分. (図 p.131)

[1] 偏微分.

◎ 1変数関数における微分の定義 (復習)

$y = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. が $x = a$ において微分可能
$\overset{def}{\iff}$ $x = a$ において, 極限値 $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在する.

また, このとき, その極限値を $f'(a)$ で表し, $x = a$ における
f の微分係数という. □

◎ 2変数関数における偏微分の定義.

$D \subset \mathbb{R}^2$, $f(x, y) : D \to \mathbb{R}$.
・y にある定数 b を代入すると. $f(x, b)$ は 1変数関数と
みなすことができる.
・そこで, この $f(x, b)$ を x で微分することを,
$f(x, y)$ を x で偏微分する という.

(以上は y についても同様).

定義 (偏微分係数)

$D \subset \mathbb{R}^2$. $f(x, y) : D \to \mathbb{R}$. $A = (a, b) \in D$.
このとき. $f(x, y)$ が 点 A において x に関して偏微分可能
$\overset{def}{\iff}$ $F(x) = f(x, b)$ が $x = a$ で (1変数関数として) 微分可能.

すなわち、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ $(=F'(a))$ が存在する。

このとき、極限値 $F'(a)$ を 点 A における f の x に関する **偏微分係数** といい、$f_x(a,b)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ などで表す。

y についても、同様に、$f(x,y)$ が点 A において y に関して偏微分可能であることや、点 A における f の x に関する偏微分係数を定める。

□

定義 (偏導関数, 偏微分)

上の D の各点 (a,b) で $f(x,y)$ が x に関して偏微分可能なとき、D の点 (a,b) に対して $f_x(a,b)$ を対応させる対応は $D\to\mathbb{R}$ の関数となる。これを f の x に関する **偏導関数** といい、

$f_x(x,y)$ で表す。

偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めることを **f を x で偏微分する** という。

関数 $z=f(x,y)$ の x に関する偏導関数を

$$f_x(x,y),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

等で表す。

以上は y についても同様。 □

注意 (微分と代入の表記とその順序)

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$: $f(x,y)$ を x で偏微分してから $(x,y)=(a,b)$ を代入。

$\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)$: $f(x,y)$ に $(x,y)=(a,b)$ を代入してから x で偏微分 $\longrightarrow 0$.

☆ 1変数関数の微分と代入についても、同様の区別があるので注意。

$f'(a)$ ： $f(x)$ を x で微分してから $x=a$ を代入。

$(f(a))'$ ： $f(x)$ に $x=a$ を代入してから x で微分 $\longrightarrow 0$.

[2] 全微分.

1変数関数の微分の意味（復習）.

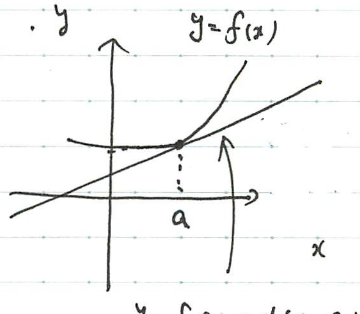
$y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能とは：

$x \to a$ のとき、 $f(x) = \underline{f(a) + \alpha(x-a)} + \underline{o(x-a)}$.

$f(x)$ は x の1次関数で近似される.

x の1次関数よりも速く0に近づく（高次の無限小）

このとき、 $\alpha = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.



2変数（多変数）関数における「全微分」

上の考え方を拡張することで、2変数（多変数）関数の「（全）微分可能性」の定義を得る.

定義（全微分）（教 p. 133）

$f(x,y)$ ： 点 (a,b) の近傍で定義されていて

$$f(x,y) = f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b) + o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right) \quad (*)$$

$$((x,y) \longrightarrow (a,b))$$

をみたす $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在するとき、
f は点 (a, b) で <u>全微分可能</u> または単に <u>微分可能</u> であるという。

（スモールオー）→ ［教］p.38

ここで、$o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$ はランダウの o、すなわち

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)-\alpha(x-a)-\beta(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0 \quad (★★)$$

を意味する。 ▨

(★) の意味.

$$f(x,y) = \underline{f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b)} + o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$$

$(x,y)\to(a,b)$ のとき、$f(x,y)$ は x と y の1次関数で近似される。

$z = f(x,y)$ で定まる曲面の (a,b) における接平面。

10/23

<u>定理 4.6</u>　$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能

$\Rightarrow$ (1) f は (a,b) で連続.
(2) f は (a,b) で x, y に関して偏微分可能.
(3) 上の式 (★) において
（全微分の定義）
$\alpha = f_x(a,b)$, $\beta = f_y(a,b)$.

Proof (1) 式 (★), (★★) より

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

これは (x,y) の (a,b) への近づき方によらないことに注意.

(2)(3) 式 (★★) において $y = b$ とおくと

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} - \alpha\right|$$